Olimpiada Națională de Matematică 2020
Etapa locală – Iași

CLASA a XI-a

Problema 1.

Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Determinați numerele reale *a* și *b*, știind că $A^2=aA+bI_3$.

b) Determinați numerele reale *x* și *y* astfel încât $A^{2020}+A^{2019}=xA+yI_3$.

Problema 2.

a) Demonstrați că, oricare ar fi matricea $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, are loc egalitatea:

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)I_2=O_2.$$

b) Găsiți o matrice $B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ astfel încât $B^2=7I_2$.

c) Demonstrați că, dacă matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ are proprietatea $\det\left(X^2-7I_2\right)=0$, atunci $X^2=7I_2$.

Problema 3.

Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 1}$, cu termenul general $x_n=\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n}$.

a) Arătați că $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\frac{1}{2}$.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}n\left(x_n-\frac{1}{2}\right)$.

Problema 4.

Spunem că o funcție $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ are prorietatea (P) dacă *f* este crescătoare și $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)=0$.

a) Demonstrați că funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$ are proprietatea (P).

b) Demonstrați că, dacă *f* este o funcție cu proprietatea (P), atunci

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x+a)-f(x+b)\right)=0,$$

oricare ar fi numerele reale pozitive *a* și *b*.

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro