Olimpiada Națională de Matematică 2020
Etapa locală – Iași

CLASA a X -a

Problema 1.

a) Să se arate că $E_n = \log_n(n+1) + \log_{n+1} n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$ nu este număr întreg și să se calculeze $[E_n]$ $(partea\ \hat{i}ntreag\breve{a})$;

b) Să se studieze monotonia șirului $(E_n)_{n\geq 2}$.

Problema 2.

Fie numerele complexe distincte a, b, c, d astfel încât $a + c = b + d$ și $a^2 + c^2 = 2bd$.

Să se arate că numerele date sunt afixele vârfurilor unui pătrat.

Problema 3.

Fie a, b, c cele trei rădăcini complexe ale ecuației $x^3 - 1 = 0$ și $u, v, w \in \mathbb{C}$ astfel încât:

$$u(v+w) = a,\ v(u+w) = b,\ w(v+u) = c.$$

a) Determinați u, v, w.

b) Determinați $n \in \mathrm{N}$ astfel încât $u^n + v^n + w^n = a^n + b^n + c^n$

Problema 4.

Să se arate că dacă $a, b, c \in (0,1)$, atunci:

a) $\log_a \dfrac{2bc}{b+c} \cdot \log_b \dfrac{2ca}{c+a} \cdot \log_c \dfrac{2ab}{a+b} \geq 1$

b) $\dfrac{1}{2+\log_a b} + \dfrac{1}{2+\log_b c} + \dfrac{1}{2+\log_c a} \leq 1$.

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași, Județul IAȘI
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro