Olimpiada Națională de Matematică 2020
Etapa locală – Iași

CLASA a IX-a

Problema 1. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, dat prin $\frac{a_1}{0!}+\frac{a_2}{1!}+\frac{a_3}{2!}+...+\frac{a_n}{(n-1)!}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, unde $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n,$ iar $0!=1$.

a) Determinați termenul general a_n.

b) Demonstrați că $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}<1$.

Problema 2. Se consideră pentagonul *ABCDE* înscris în cercul de centru *O* cu $AD \perp BE$. Dacă H_1, H_2, H_3, H_4 sunt ortocentrele triunghiurilor *ABC*, *BCD*, *CDE*, respectiv *ACE*, arătați că $H_1H_2H_3H_4$ este dreptunghi.

Problema 3. Determinați $x \in \mathbb{R}$, pentru care are loc egalitatea $\{x\}+\left\{x+\frac{1}{3}\right\}+\left\{x+\frac{2}{3}\right\}=[x]^2$, unde $\{y\}$ reprezintă partea fracționară, iar $[y]$ reprezintă partea întreagă a numărului real *y*.

Problema 4. Se consideră numerele reale pozitive $a,\ b,\ c$ care verifică relația $ab+ac+bc=abc$.

a) Demonstrați că $a+b+c\geq 9$.

b) Demonstrați că $(a+b+c)\sqrt{9+a+b+c}\geq 3\sqrt{6abc}$.

Timp de lucru: 3 ore
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro