Olimpiada Națională de Matematică 2020
Etapa locală – Iași

CLASA a VIII-a

Problema 1.

a) Dacă $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ astfel încât $a^2+b^2=13, c^2+d^2=7$ și $ab=cd=2\sqrt{3},$ să se demonstreze că $\dfrac{11}{|a-b|}+\dfrac{2}{|c+d|}\in\mathbb{Q}.$

b) Se consideră fracția $F(x)=\dfrac{2x^3-x^2+x+1}{2x^3-3x^2+3x-1}$, unde $x\in\mathbb{Z}.$

i) Arătați că $F(x)$ se poate simplifica prin numărul $x^2-x+1.$

ii) Determinați valorile lui $x\in\mathbb{Z}$ pentru care $F(x)\in\mathbb{Z}.$

Problema 2.

Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$ a cărei înălțime VO este cât jumătate din muchia bazei. Știind că punctul S este simetricul punctului A față de V, demonstrați că:

a) dreapta SC este paralelă cu planul (VBD);

b) dreapta CV este perpendiculară pe planul (SBD).

Problema 3.

Se consideră piramida hexagonală regulată $VABCDEF$ de vârf V, în care A_1 este mijlocul lui $[CD]$, O este centrul bazei, $AA_1\cap CF=\{M\}$ și $R\in[VF]$ astfel încât $2VF=3FR.$ Demonstrați că:

a) dreptele AC și VE sunt perpendiculare;

b) dreapta RM este paralelă cu planul (VBC);

c) RM, AT și VO sunt drepte concurente, T fiind mijlocul lui $[VD]$.

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117,
Iași
Județul IAȘI
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

Problema 4.

Se consideră numerele reale x și y. Demonstrați că:

a) $x+y=xy$ dacă și numai dacă există un număr real nenul a astfel încât $x=1+a$ și $y=1+\frac{1}{a}$;

b) dacă $x+y=xy$, atunci $x+y\le 0$ sau $x+y\ge 4$.

Timp de lucru: 3 ore
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Iași
Județul IAȘI
Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117,
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro