

- Ⓐ Paralelipipedul dreptunghic  $ABCD A' B' C' D'$  are  $AA' = 3\sqrt{5}$  cm,  $AB = 6$  cm și  $BC = 3$  cm. Fie punctul  $O$  mijlocul segmentului  $BD$  și punctul  $M$  mijlocul segmentului  $AB$ .
- Demonstrați că dreptele  $OM$  și  $A'B$  sunt perpendiculare.
  - Calculați măsura unghiului determinat de dreapta  $D'B$  și planul  $(ABC)$ .
  - Calculați valoarea tangentei unghiului determinat de planele  $(A'DM)$  și  $(D'DM)$ .
- Ⓑ Paralelipipedul dreptunghic  $ABCD A' B' C' D'$  are  $AA' = 8\sqrt{2}$  cm și  $BC = 8\sqrt{7}$  cm. Aria patrulaterului  $ABC'D'$  este egală cu  $192$  cm<sup>2</sup>.
- Arătați că  $AB = 8$  cm.
  - Calculați valoarea tangentei unghiului format de dreptele  $A'C$  și  $AD$ .
  - Calculați distanța de la punctul  $D$  la planul  $(ABC)$ .
- Ⓒ  $SABC$  este o piramidă triunghiulară regulată, de bază  $ABC$ . Punctul  $M$  este mijlocul muchiei  $BC$ , măsura unghiului determinat de dreptele  $SM$  și  $SA$  este egală cu  $90^\circ$  și  $SA = 6\sqrt{2}$  cm.
- Arătați că triunghiul  $SAC$  este dreptunghic.
  - Calculați volumul piramidei  $SABC$ .
  - Fie punctele  $A$  și  $B$  mijloacele muchiilor  $SA$  și respectiv  $SB$ , iar  $P$  și  $Q$  proiecțiile punctelor  $A'$  și respectiv  $B'$  pe planul  $(ABC)$ . Calculați aria triunghiului  $CPQ$ .
- Ⓓ Piramida triunghiulară  $ABCD$  are toate muchiile de lungime  $a$  cm, unde  $a$  este un număr real pozitiv. Punctul  $M$  este mijlocul laturii  $AC$ .
- Arătați că dreapta  $AC$  este perpendiculară pe planul  $(MBD)$ .
  - Calculați aria triunghiului  $MBD$ .
  - Calculați distanța de la punctul  $M$  la planul  $(BCD)$ .
- Ⓔ Piramida patrulateră regulată  $SPACE$ , de bază  $PACE$ , are muchia bazei  $PA = 12$  cm și înălțimea  $SO = 6$  cm.
- Calculați volumul piramidei  $SPACE$ .
  - Știind că punctul  $M$  este mijlocul muchiei  $SP$ , arătați că dreapta  $MO$  este paralelă cu planul  $(SEC)$ .
  - Calculați măsura unghiului determinat de planele  $(SPC)$  și  $(SAC)$ .
- Ⓕ Prisma dreaptă  $ABCA' B' C'$  cu baza triunghiul echilateral  $ABC$ , are muchia bazei  $AB = 4$  cm și aria laterală egală cu  $72$  cm<sup>2</sup>.
- Arătați că muchia laterală a prisme este de  $6$  cm.
  - Calculați volumul piramidei a cărei bază coincide cu una din bazele prisme și al cărei vârf este centrul de greutate al celeilalte baze a prisme.
  - Calculați valoarea sinusului unghiului determinat de dreptele  $AB'$  și  $BC'$ .
- Ⓖ În prisma dreaptă  $ABCD A' B' C' D'$  cu baza pătrat, măsura unghiului dintre diagonala  $D'B$  și planul  $(ABC)$  este de  $60^\circ$ , iar latura bazei  $ABCD$  este  $AB = 5$  cm.
- Demonstrați că dreptele  $D'C$  și  $AD$  sunt perpendiculare.
  - Calculați aria laterală a prisme.
  - Fie punctele  $M, N, P, Q$  situate pe muchiile  $[AA']$ ,  $[BB']$ ,  $[CC']$ , respectiv  $[DD']$  astfel încât  $AM = 7$  cm,  $BN = 3$  cm,  $CP = 1$  cm și  $DQ = 5$  cm. Arătați că punctele  $M, N, P, Q$  sunt coplanare.
- Ⓗ Piramida patrulateră regulată  $VABCD$ , de vârf  $V$  și bază  $ABCD$ , are muchia bazei de  $12$  cm și înălțimea de  $8$  cm. Punctul  $M$  este mijlocul laturii  $BC$ .
- Calculați aria laterală a piramidei.
  - Fie punctul  $N$  situat pe latura  $AB$  astfel încât  $NB = 3 \cdot AN$ . Calculați aria triunghiului  $MND$ .
  - Calculați valoarea tangentei unghiului determinat de planele  $(VAM)$  și  $(ABC)$ .
- Ⓖ În prisma dreaptă  $ABCD A' B' C' D'$  cu baza pătrat, muchia bazei  $ABCD$  este de  $6\sqrt{2}$  cm și înălțimea  $AA'$  este de  $6$  cm. Pe segmentul  $AC$  se iau punctele  $E$  și  $F$  astfel încât  $[AE] \equiv [CF] \equiv [AB]$ .
- Calculați aria totală a prisme.
  - Demonstrați că patrulaterul  $BEDF$  este romb.
  - Calculați măsura unghiului determinat de planele  $(C'CD)$  și  $(D'DF)$ .
- Ⓗ Paralelipipedul dreptunghic  $ABCD A' B' C' D'$  are  $AB = 20$  cm,  $BC = 16$  cm și  $AA' = 15$
- Calculați volumul paralelipipedului dreptunghic.
  - Calculați distanța de la punctul  $B$  la dreapta  $DC'$ .
  - Fie un punct  $Q$  situat pe muchia  $AA'$ . Calculați lungimea segmentului  $QA$  astfel încât perimetrul triunghiului  $B'QD$  să fie minim.

- @ Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile de 2 cm,  $\sqrt{7}$  cm,  $\sqrt{5}$  cm. Diagonala paralelipipedului are lungimea de ... cm.
- @ În cubul  $ABCD A' B' C' D'$ , aria triunghiului  $DOB$  este egală cu  $\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>, unde  $\{O\} = BC' \cap B'C$ .
- b) Arătați că  $AB = 2$  cm.  
c) Aflați volumul piramidei patrulateră regulată  $OADD'A'$  care are vârful  $O$  și baza  $ADD'A'$ .  
d) Calculați valoarea cosinusului unghiului determinat de dreptele  $DO$  și  $A'B$ .
- @ Fie trunchiul de piramidă triunghiulară regulată  $ABCA'B'C'$ . Punctele  $O$  și  $O'$  sunt centrele de greutate ale bazelor  $ABC$ , respectiv  $A'B'C'$ ,  $AB = 8$  cm,  $A'B' = 6$  cm și  $OO' = 4$  cm. Calculați:
- b) aria totală a trunchiului; c) volumul piramidei din care provine trunchiul;  
d) distanța de la punctul  $O$  la planul  $(BCC')$ .
- @ Cubul  $ABCD A' B' C' D'$  are muchia  $AB = 6$  cm.
- b) Calculați aria triunghiului  $A'BD$ .  
c) Arătați că dreptele  $AC'$  și  $A'O$  sunt perpendiculare, unde  $AC \cap BD = \{O\}$ .  
d) Calculați volumul piramidei regulate cu vârful în  $C'$  și cu baza triunghiul  $A'BD$ .
- @ Piramida patrulateră regulată  $SABCD$ , cu baza  $ABCD$ , are înălțimea de  $6\sqrt{2}$  cm și muchia bazei de 12 cm.
- b) Calculați volumul piramidei.  
c) Calculați valoarea sinusului unghiului determinat de două fețe laterale alăturate.  
d) Calculați distanța de la punctul  $P$ , mijlocul înălțimii piramidei, la planul  $(SBC)$ .
- @ O piramidă patrulateră regulată  $VABCD$ , de vârf  $V$  și bază  $ABCD$ , are latura bazei de 12 cm și înălțimea de 6 cm.
- b) Calculați aria laterală a piramidei.  
c) Calculați valoarea cosinusului unghiului determinat de o muchie laterală cu planul bazei.  
d) Calculați distanța de la punctul  $H$ , mijlocul înălțimii piramidei, la planul  $(VAB)$ .
- @ Piramida patrulateră regulată  $VABCD$ , cu vârful  $V$  și baza  $ABCD$ , are latura bazei de 12 cm și înălțimea de 8 cm.
- b) Calculați aria totală a piramidei.  
c) Calculați valoarea sinusului unghiului determinat de muchiile laterale  $VB$  și  $VD$ .  
d) Fie  $H$  un punct situat pe înălțimea  $[VO]$  a piramidei. Știind că distanța de la punctul  $H$  la planul  $(ABC)$  este egală cu distanța de la punctul  $H$  la planul  $(VAB)$ , calculați lungimea segmentului  $OH$ .
- @ Piramida patrulateră regulată  $VABCD$ , de vârf  $V$  și bază  $ABCD$ , are  $VA = AB = 6$  cm.
- b) Calculați aria laterală a piramidei  $VABCD$ . c) Demonstrați că dreptele  $VB$  și  $VD$  sunt perpendiculare.  
d) Calculați valoarea sinusului unghiului determinat de planele  $(VAB)$  și  $(VDC)$ .
- @ Piramida triunghiulară regulată  $ABCD$ , de bază  $ABC$  are  $AB = 8$  cm și  $AD = 5$  cm. Punctele  $M$  și  $N$  sunt mijloacele segmentelor  $AB$ , respectiv  $AD$ .
- b) Calculați aria totală a piramidei  $ABCD$ .  
c) Calculați valoarea sinusului unghiului determinat de dreptele  $MN$  și  $DC$ .  
d) Calculați lungimea proiecției segmentului  $[MN]$  pe planul  $(DBC)$ .
- @ Cubul  $ABCD A' B' C' D'$  are muchia de 4 cm.
- b) Demonstrați că planul  $(ACB')$  este paralel cu planul  $(A'C'D)$ .  
c) Calculați măsura unghiului determinat de dreptele  $CD$  și  $A'C'$ .  
d) Calculați distanța de la punctul  $B$  la planul  $(A'C'D)$ .
- @ Paralelipipedul dreptunghic  $ABCDEFGH$  are  $AB = 2$  cm,  $BC = 2\sqrt{3}$  cm și  $AE = 2$  cm.
- b) Calculați aria totală a paralelipipedului. c) Aflați măsura unghiului determinat de planele  $(EBC)$  și  $(ABC)$ .  
d) Punctul  $M$  aparține segmentului  $BC$  astfel încât  $MC = 1$  cm. Determinați distanța de la punctul  $E$  la dreapta  $MD$ .
- @  $ABCD A' B' C' D'$  este un trunchi de piramidă patrulateră regulată care are baza mare pătratul  $ABCD$ . Măsura unghiului dintre muchia  $AA'$  și planul  $(ABC)$  este de  $45^\circ$  și  $AA' = A'B' = 6$  cm.
- b) Arătați că înălțimea trunchiului de piramidă are lungimea de  $3\sqrt{2}$  cm.  
c) Calculați volumul trunchiului de piramidă.  
d) Calculați valoarea sinusului unghiului determinat de dreptele  $A'A$  și  $BC'$ .

- @ Trunchiul de piramidă patrulateră regulată  $ABCD A' B' C' D'$ , cu bazele  $ABCD$  și  $A' B' C' D'$ , are  $AB = 18$  cm,  $A' B' = 6$  cm și apotema trunchiului de 12 cm.
- b) În trapezul  $ABB' A'$  fie  $AB' \cap A' B = \{P\}$ . Calculați perimetrul triunghiului  $PAB$ .
- c) Calculați volumul trunchiului de piramidă.
- d) Calculați măsura unghiului determinat de planul unei fețe laterale a trunchiului de piramidă și planul  $(ABC)$ .
- @ Piramida triunghiulară regulată  $VABC$  cu baza  $ABC$ , are  $AB = VA = 6$  cm.
- b) Demonstrați că muchiile  $VA$  și  $BC$  sunt perpendiculare. c) Calculați volumul piramidei  $VABC$ .
- d) Calculați distanța de la centrul de greutate al triunghiului  $VAB$  la planul  $(ABC)$ .
- @  $ABCA' B' C'$  este o prismă dreaptă cu una din baze triunghiul echilateral  $ABC$ . Volumul prisme este egal cu  $54\sqrt{3}$  cm<sup>3</sup>. Muchiile  $AB$  și  $BB'$  sunt congruente, iar punctul  $M$  este mijlocul laturii  $AB$ .
- b) Arătați că  $AB = 6$  cm. c) Arătați că planele  $(MCB')$  și  $(ABB')$  sunt perpendiculare.
- d) Calculați distanța de la punctul  $B$  la planul  $(MCB')$ .
- @ O piramidă patrulateră regulată  $VABCD$ , de bază  $ABCD$ , are  $VA = 10$  cm. Fie punctul  $M$  mijlocul segmentului  $BC$  și  $VM = 5\sqrt{3}$  cm.
- b) Calculați măsura unghiului determinat de dreapta  $VB$  cu planul bazei  $(ABC)$ .
- c) Fie punctul  $T$  situat pe segmentul  $DC$  astfel încât  $VT + TM$  să aibă lungimea minimă. Calculați lungimea segmentului  $TC$ .
- @ În prisma dreaptă  $ABCA' B' C'$ , cu baza triunghiul echilateral  $ABC$ , se consideră:  $BA' \cap AB' = \{O\}$ ,  $BC' \cap CB' = \{O'\}$ , înălțimea  $AA' = 6$  cm și latura bazei  $AB = 8$  cm.
- b) Demonstrați că dreptele  $OO'$  și  $BB'$  sunt perpendiculare. c) Calculați distanța de la punctul  $B$  la dreapta  $OO'$ .
- d) Calculați valoarea sinusului unghiului determinat de planele  $(B'AC)$  și  $(BA'C')$ .
- @ Fiecare muchie a unei piramide triunghiulare regulate are lungimea de 10 cm. Aria totală a =
- @ Suma tuturor muchiilor unui paralelipiped dreptunghic  $ABCD A' B' C' D'$  este egală cu 60 cm, iar diagonala  $AC' = 9$  cm.
- b) Calculați aria totală a paralelipipedului dreptunghic  $ABCD A' B' C' D'$ .
- c) Știind că  $AB = BC = 4$  cm, calculați perimetrul dreptunghiului  $ACC'A'$ .
- d) Știind că  $A'C' \cap B'D' = \{O'\}$  și că  $AB = BC = 4$  cm, calculați valoarea tangentei unghiului determinat de dreapta  $O'A$  cu planul  $(DBB')$ .
- @ Muchia cubului  $ABCD A' B' C' D'$  este  $AB = 4$  cm. Punctele  $M$  și  $N$  se află pe muchiile  $DD'$ , respectiv  $BB'$  astfel încât  $MD' = BN = 1$  cm.
- b) Calculați aria totală a piramidei triunghiulare regulate  $ACD'B'$ .
- c) Calculați lungimea segmentului  $MN$ . d) Calculați aria triunghiului  $AMN$ .
- @ Fie  $ABCD A' B' C' D'$  un paralelipiped dreptunghic care are  $AB = 6\sqrt{2}$  cm,  $BC = 6$  cm și măsura unghiului  $BA'C$  de  $30^\circ$ .
- b) Arătați că  $AA' = 6$  cm. c) Calculați aria totală a paralelipipedului.
- d) Calculați distanța de la centrul feței  $BCC'B'$  la planul  $(A'BC)$ .
- @ Fie  $ABCD A' B' C' D'$  paralelipipedul dreptunghic în care laturile bazei  $ABCD$  sunt  $AB = 30$  cm și  $AD = 40$  cm, iar înălțimea  $AA' = 24$  cm.
- b) Calculați aria laterală a paralelipipedului. c) Calculați distanța de la punctul  $A'$  la dreapta  $BC$ .
- d) Calculați măsura unghiului determinat de planele  $(ACD)$  și  $(ACD')$ .
- @ Piramida triunghiulară regulată  $VABC$  are toate muchiile congruente și  $AB = 12$  cm. Fie  $M$  un punct situat pe muchia  $VA$  astfel încât  $VA = 4 \cdot VM$  și punctul  $N$  mijlocul muchiei  $BC$ .
- b) Arătați că triunghiul  $MAN$  este isoscel.
- c) Calculați volumul piramidei triunghiulare regulate  $VABC$ .
- d) Aflați valoarea sinusului unghiului determinat de planele  $(MBC)$  și  $(ABC)$ .
- @ În cubul  $ABCD A' B' C' D'$  punctul  $M$  este mijlocul laturii  $AB$ , iar  $MD' = 6$  cm.
- b) Arătați că  $AB = 4$  cm.
- c) Calculați distanța de la punctul  $C$  la punctul de intersecție al dreptei  $MD$  cu planul  $(BB'C')$ .
- d) Calculați distanța de la punctul  $C$  la planul  $(MC'D')$ .

- Ⓐ Fie  $VABCD$  o piramidă patrulateră regulată cu baza  $ABCD$ . Latura bazei este egală cu  $12\sqrt{3}$  cm și apotema piramidei este egală cu 12 cm.
- Calculați volumul piramidei  $VABCD$ .
  - Calculați măsura unghiului determinat de planul unei fețe laterale
  - Se secționează piramida cu un plan paralel cu planul bazei astfel încât aria laterală a trunchiului de piramidă obținut să fie 75% din aria laterală a piramidei inițiale. Calculați distanța de la planul bazei piramidei inițiale la planul de secțiune.
- Ⓑ În piramida triunghiulară regulată  $ABCD$  toate cele șase muchii sunt congruente. Înălțimea piramidei este  $DO$ , punctul  $M$  este proiecția punctului  $O$  pe muchia  $DB$  și  $MC = 2\sqrt{7}$  cm.
- Arătați că  $AB = 6$  cm.
  - Determinați volumul piramidei triunghiulare regulate  $ABCD$ .
  - Calculați valoarea sinusului unghiului determinat de dreapta  $MC$  și planul  $(BOD)$ .
- Ⓒ În piramida triunghiulară regulată  $VABC$ , cu baza  $ABC$ , avem  $VA = 6$  cm și  $AB = 6\sqrt{2}$  cm.
- Calculați volumul piramidei  $VABC$ .
  - Demonstrați că muchiile  $VA$  și  $BC$  sunt perpendiculare.
  - Punctul  $P$  este situat pe înălțimea  $VO$  la distanță egală de toate fețele piramidei. Calculați lungimea segmentului  $PO$ .
- Ⓓ Trunchiul de piramidă patrulateră regulată  $ABCD A' B' C' D'$  are baza mare  $ABCD$ , valoarea tangentei unghiului  $A'AC$  egală cu  $\frac{3}{2}$ ,  $AB = 12$  cm și  $A'C' = 8\sqrt{2}$  cm.
- Arătați că înălțimea trunchiului de piramidă are lungimea de  $3\sqrt{2}$  cm.
  - Calculați aria laterală a trunchiului de piramidă.
  - Fie  $P$  un punct situat pe muchia  $BB'$ . Calculați lungimea segmentului  $BP$  astfel încât aria trunchiului  $APC$  să fie minimă.
- Ⓔ În cubul  $ABCD A' B' C' D'$ , punctul  $M$  este mijlocul muchiei  $BC$  și  $A'M = 12$  cm.
- Arătați că  $AB = 8$  cm.
  - Calculați valoarea tangentei unghiului determinat de diagonala  $BD'$  și planul bazei  $(ABC)$ .
  - Calculați distanța de la punctul  $C$  la planul  $(A'AM)$ .
- Ⓕ Un cub are muchia de 2 cm. Diagonala cubului are lungimea egală cu ... cm.
- Ⓖ În paralelipipedul dreptunghic  $ABCD A' B' C' D'$ , de bază  $ABCD$ , se cunosc următoarele lungimi:  $BA' = 6$  cm,  $CA' = 9$  cm și  $DA' = 7$  cm.
- Demonstrați că dreptele  $A'B$  și  $BC$  sunt perpendiculare.
  - Calculați volumul paralelipipedului.
  - Calculați valoarea sinusului unghiului determinat de planele  $(A'BC)$  și  $(B'AD)$ .
- Ⓗ O prismă dreaptă are ca baze, hexagoanele regulate  $ABCDEF$  și  $A'B'C'D'E'F'$ . Măsura unghiului  $A'CA$  este de  $45^\circ$ ,  $AD \cap CF = \{O\}$  și  $A'O = 6\sqrt{3}$  cm.
- Arătați că  $AB = 3\sqrt{3}$  cm.
  - Calculați aria totală a prisme.
  - Calculați distanța de la punctul  $B$  la planul  $(ACC')$ .
- Ⓙ Piramida triunghiulară regulată  $VABC$  are  $VA = 10$  cm și raza cercului circumscris bazei  $ABC$  de  $4\sqrt{3}$  cm.
- Arătați că  $AB = 12$  cm.
  - Fie punctul  $E$  mijlocul laturii  $AB$ . Calculați valoarea sinusului unghiului determinat de dreptele  $VE$  și  $BC$ .
  - Calculați perimetrul minim al trunchiului  $MBC$ , unde punctul  $M$  aparține muchiei  $AV$ .
- Ⓚ În piramida patrulateră regulată  $ABCDE$ , de bază  $ABCD$ ,  $AE = 4$  cm și măsura unghiului  $AEC$  este egală cu  $120^\circ$ . Notăm cu  $O$  intersecția dreptelor  $AC$  și  $BD$ .
- Arătați că  $EO = 2$  cm.
  - Calculați aria totală a piramidei.
  - Printr-un punct  $F$  situat pe segmentul  $EO$  ducem un plan paralel cu planul bazei. Piramida mică, astfel formată are volumul  $2 \text{ cm}^3$ . Calculați lungimea segmentului  $EF$ .
- Ⓛ Bazele unui trunchi de piramidă patrulateră regulată sunt  $ABCD$  și  $A'B'C'D'$ . Latura bazei mari este  $AB = 16$  cm, latura bazei mici este  $A'B' = 4$  cm și apotema trunchiului este de 9 cm.
- Arătați că înălțimea trunchiului are lungimea egală cu  $3\sqrt{5}$  cm.
  - Calculați volumul piramidei din care provine trunchiul de piramidă.
  - Calculați valoarea sinusului unghiului determinat de planele  $(ABB')$  și  $(DCC')$ .
- Ⓜ Prisma dreaptă  $ABCD A' B' C' D'$  are ca baze pătratele  $ABCD$  și  $A'B'C'D'$ , aria laterală egală cu  $100\sqrt{3} \text{ cm}^2$  și volumul egal cu  $125\sqrt{3} \text{ cm}^3$ .
- Calculați distanța de la punctul  $A$  la dreapta  $B'C$ .
  - Calculați măsura unghiului determinat de planele  $(DCB')$  și  $(ABC')$ .

- @Piramida patrulateră regulată  $VABCD$  de vârf  $V$  și bază  $ABCD$ , are muchia bazei de 10 cm și înălțimea de 12 cm.
- Calculați volumul piramidei.
  - La ce distanță de vârful piramidei trebuie dus un plan paralel cu planul bazei, astfel încât raportul dintre volumul piramidei mici și volumul trunchiului de piramidă obținut să fie egal cu  $\frac{1}{7}$ ?
  - Calculați valoarea tangentei unghiului determinat de planele  $(VAC)$  și  $(VAB)$ .
- @Fie prisma dreaptă  $ABCA'B'C'$  cu baza  $ABC$  triunghi echilateral. Latura bazei  $ABC$  are lungimea de 24 cm, iar înălțimea prisme  $AA'$  are lungimea de 12 cm.
- Calculați aria totală a prismei.
  - Calculați distanța de la punctul  $A$  la planul  $(A'BC)$ .
  - Calculați valoarea sinusului unghiului determinat de dreptele  $AB'$  și  $A'C$ .
- @ În piramida patrulateră regulată  $VABCD$ , lungimea înălțimii  $VO$  este egală cu lungimea laturii  $BC$  a pătratului  $ABCD$  și punctul  $M$  este mijlocul laturii  $BC$ .
- Arătați că triunghiul  $VMA$  este isoscel.
  - Știind că  $VM = 4\sqrt{5}$  cm, aflați volumul piramidei  $VABCD$ .
  - Știind că  $VM = 4\sqrt{5}$  cm, determinați distanța de la punctul  $A$  la planul  $(VBC)$ .
- @Piramida triunghiulară regulată  $VABC$ , de vârf  $V$  și bază  $ABC$ , are  $AB = 24$  cm și  $VA = 12\sqrt{5}$  cm. Punctul  $M$  este mijlocul laturii  $BC$ .
- Calculați volumul piramidei  $VABC$ .
  - Calculați distanța de la punctul  $M$  la muchia  $AV$ .
  - Calculați valoarea tangentei unghiului determinat de planele  $(AVM)$  și  $(AVB)$ .
18. Prisma dreaptă  $ABCA'B'C'$ , cu baza triunghi echilateral  $ABC$ , are aria laterală egală cu  $48 \text{ cm}^2$  și aria totală egală cu  $8 \cdot (6 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$ .
- Arătați că  $AB = 4$  cm.
  - Calculați volumul prisme  $ABCA'B'C'$ .
  - Fie punctul  $G$  centrul de greutate al triunghiului  $A'B'C'$ . Calculați distanța de la punctul  $A$  la planul  $(GBC)$ .
- @ Fie prisma dreaptă  $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$  cu una din baze, hexagonul regulat  $ABCDEF$  de latură  $AB = 3$  cm. Înălțimea prisme este  $AA' = 3\sqrt{3}$  cm, iar punctul  $S$  este mijlocul segmentului  $EB'$ .
- Calculați aria laterală a prisme.
  - Arătați că dreapta  $AE'$  este paralelă cu planul  $(DBB')$ .
  - Calculați distanța de la punctul  $S$  la dreapta  $AE'$ .
- @ Pătratele  $MNPQ$  și  $NPRT$  sunt situate în plane perpendiculare și  $MN = 10$  cm.
- Arătați că  $PNRQ$  este o piramidă triunghiulară regulată.
  - Calculați distanța de la punctul  $R$  la mijlocul segmentului  $QT$ .
  - Calculați măsura unghiului determinat de dreptele  $NQ$  și  $TP$ .
- @ Un trunchi de piramidă patrulateră regulată  $ABCD A'B'C'D'$  cu baza mare  $ABCD$  și baza mică  $A'B'C'D'$ , are  $AB = 8$  cm și  $A'B' = 4$  cm. Muchia laterală face cu planul bazei mari un unghi de  $60^\circ$ .
- Arătați că lungimea înălțimii trunchiului de piramidă este egală cu  $2\sqrt{6}$  cm.
  - Calculați aria totală a trunchiului.
  - Calculați distanța de la punctul  $A$  la planul  $(DCC')$ .
- @ În prisma dreaptă  $ABCD A'B'C'D'$  cu una din baze pătratul  $ABCD$ ,  $\{O\} = AC \cap BD$ ,  $AB = 6$  cm și  $AA' = 7$  cm.
- Calculați volumul prisme.
  - Calculați distanța de la punctul  $O$  la diagonala  $A'C$ .
  - Fie  $\{O'\} = A'D \cap AD'$ . Calculați măsura unghiului determinat de dreptele  $OO'$  și  $BC$ .
- @ Se consideră piramida triunghiulară regulată de vârf  $V$  și bază  $ABC$ , care are înălțimea de 12 cm și măsura unghiului determinat de planul bazei și planul unei fețe laterale de  $60^\circ$ .
- Arătați că  $AB = 24$  cm.
  - Calculați aria totală a piramidei.
  - La ce distanță de planul bazei trebuie dus un plan paralel cu planul bazei, astfel încât piramida mică formată să aibă volumul egal cu  $\frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$ ?
- @ În cubul  $ABCD A'B'C'D'$  care are muchia de  $5\sqrt{2}$  cm, notăm  $A'C' \cap B'D' = \{O'\}$ . Punctul  $M$  este simetricul punctului  $B$  față de dreapta  $AD$ .
- Demonstrați că dreapta  $MD$  este perpendiculară pe planul  $(D'DB)$ .
  - Calculați distanța de la punctul  $M$  la dreapta  $D'B$ .
  - Demonstrați că dreptele  $D'B$  și  $DO'$  sunt perpendiculare.

- @ Prisma dreaptă  $ABCD A' B' C' D'$  are ca baze pătratele  $ABCD$  și  $A' B' C' D'$ , înălțimea  $AA' = 9$  cm și diagonala  $DB' = 3\sqrt{41}$  cm.      b) Calculați volumul prisme.  
 c) Calculați aria triunghiului  $ACD'$ .      d) Calculați distanța de la punctul  $B'$  la planul  $(ACD')$ .
- @ Cubul  $ABCD A' B' C' D'$  are  $AB = 6$  cm. Pe laturile pătratului  $ABCD$  alegem punctele  $M \in (AB)$ ,  $N \in (BC)$ ,  $P \in (CD)$ ,  $Q \in (DA)$  astfel încât  $AM = BN = CP = DQ = 2$  cm.  
 b) Calculați distanța de la punctul  $A'$  la dreapta  $BD$ .      c) Demonstrați că  $MNPQ$  este pătrat.  
 d) Fie  $\{O'\} = A'C' \cap B'D'$ . Calculați valoarea raportului dintre volumul cubului și volumul piramidei patrulatere regulate de vârf  $O'$  și bază  $MNPQ$ .
- @ În cubul  $ABCD A' B' C' D'$  punctul  $M$  este mijlocul laturii  $AB$ , punctul  $N$  este mijlocul laturii  $BC$  și  $DM = 2\sqrt{5}$  cm.  
 b) Demonstrați că dreptele  $AN$  și  $DM$  sunt perpendiculare.      c) Calculați aria totală a cubului.  
 d) Știind că aria triunghiului  $A'MD = a$  cm<sup>2</sup>, arătați că numărul  $a$  se află în intervalul  $(9; 10)$ .
8. Trunchiul de piramidă triunghiulară regulată  $ABCA' B' C'$  are baza mare  $ABC$ ,  $AB = 6$  cm,  $A'B' = 3$  cm și  $AC' = \sqrt{37}$  cm. Punctul  $M$  este mijlocul segmentului  $AC$ .  
 b) Arătați că lungimea înălțimii trunchiului este de 4 cm.  
 c) Calculați volumul piramidei triunghiulare regulate din care provine trunchiul.  
 d) Dacă punctul  $D$  este proiecția punctului  $A'$  pe planul  $(ABC)$ , arătați că dreapta  $AB$  este perpendiculară pe planul  $(A'DM)$ .
- @ Piramida triunghiulară regulată  $ABCD$  de vârf  $D$  și bază  $ABC$ , are  $BC = AD = 6$  cm. Punctele  $M$  și  $N$  sunt mijloacele laturilor  $AB$ , respectiv  $CD$ .  
 b) Calculați volumul piramidei  $ABCD$ .      c) Calculați distanța de la punctul  $C$  la planul  $(ABN)$ .  
 d) Calculați măsura unghiului determinat de dreptele  $MN$  și  $AC$ .
- @ Piramida hexagonală regulată  $VABCDEF$ , de vârf  $V$ , are aria laterală egală cu  $48\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup> și apotema piramidei de  $4\sqrt{3}$  cm.  
 b) Arătați că latura bazei  $AB = 4$  cm.      c) Calculați volumul piramidei.  
 d) Calculați valoarea sinusului unghiului determinat de planul  $(VBD)$  cu planul bazei.
- @ În piramida triunghiulară regulată  $VABC$  de vârf  $V$  și bază  $ABC$ , înălțimea  $VO$  are lungimea egală cu 12 cm, iar distanța de la punctul  $O$  la planul  $(VBC)$  este egală cu 7,2 cm.  
 b) Calculați aria laterală a piramidei  $VABC$ .  
 c) Știind că punctele  $G_1, G_2, G_3$  sunt centrele de greutate ale fețelor  $VAB, VAC$ , respectiv  $VBC$ , calculați volumul piramidei regulate  $VG_1G_2G_3$ .
- @ Piramida patrulateră regulată  $VABCD$  cu vârful  $V$  și baza  $ABCD$ , are  $AB = VO = 10$  cm, unde  $AC \cap BD = \{O\}$ .  
 b) Calculați aria laterală a piramidei  $VABCD$ .      c) Calculați distanța de la punctul  $A$  la planul  $(VBC)$ .  
 d) Calculați valoarea sinusului unghiului determinat de muchia  $VA$  și planul  $(VBC)$ .
- @ În interiorul cubului  $ABCD A' B' C' D'$  se consideră punctul  $M$  astfel încât  $MABCD$  să fie o piramidă patrulateră regulată. Punctele  $O$  și  $O'$  sunt centrele fețelor  $ABCD$ , respectiv  $A' B' C' D'$ .  
 b) Calculați măsura unghiului format de dreptele  $A'C'$  și  $BD$ .  
 c) Arătați că punctele  $O, M$  și  $O'$  sunt coliniare.  
 d) Pentru  $AB = 6$  cm, calculați lungimea segmentului  $OM$  astfel încât apotema piramidei regulate  $MABCD$  să aibă aceeași lungime ca și muchia cubului.
- @ Prisma dreaptă  $ABCA' B' C'$ , cu una din baze triunghiul echilateral  $ABC$ , are  $AB = 10$  cm,  $BB' = 5$  cm și punctul  $M$  situat pe muchia  $A'C'$  astfel încât  $A'M = 5$  cm.  
 b) Aflați aria totală a prisme.      c) Calculați măsura unghiului determinat de dreptele  $AA'$  și  $MB$ .  
 d) Calculați distanța de la punctul  $M$  la planul  $(B'BC)$ .
- @ Cubul  $ABCD A' B' C' D'$  are lungimea muchiei de 6 cm.  
 b) Calculați perimetrul triunghiului  $ACD'$       c) Calculați aria totală a piramidei triunghiulare regulate  $ACB'D'$ .  
 d) Arătați că dreapta  $B'D$  este perpendiculară pe planul  $(ACD')$ .
- @ Prisma dreaptă  $ABCA' B' C'$  cu una din baze triunghiul echilateral  $ABC$ , are  $AB = 18$  cm și  $AA' = 6$  cm. În triunghiul  $ABC$ , bisectoarele unghiurilor  $B$  și  $C$  se intersectează în  $I$ . Paralela prin punctul  $I$  la latura  $BC$  intersectează laturile  $AB$  și  $AC$  în  $M$ , respectiv  $N$ .  
 b) Demonstrați că  $MN = BM + CN$ .      c) Calculați aria totală a prisme.  
 d) Calculați măsura unghiului determinat de planele  $(ABC)$  și  $(A'MN)$ .

- ⓐ În prisma dreaptă  $ABCD A' B' C' D'$  cu una din baze pătratul  $ABCD$ , avem  $BC' \cap CB' = \{O\}$ ,  $AB = 2$  cm și înălțimea  $BB' = 2\sqrt{3}$  cm. c) Demonstrați că triunghiul  $AOD'$  este dreptunghic.  
d) Calculați valoarea sinusului unghiului determinat de dreapta  $AO$  și dreapta  $B'D'$ .
- ⓑ Cubul  $ABCD A' B' C' D'$  are  $AB = 4$  cm,  $O$  este centrul bazei  $ABCD$ , iar  $M$  este mijlocul muchiei  $DD'$ .  
b) Calculați aria triunghiului  $B'MO$ . c) Demonstrați că planele  $(AMO)$  și  $(B'MO)$  sunt perpendiculare.  
d) Calculați valoarea sinusului unghiului determinat de dreptele  $A'C$  și  $MO$ .
- ⓒ Piramida triunghiulară regulată  $DABC$  are înălțimea  $DO = 4$  cm și aria bazei  $ABC$  egală cu  $27\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>.  
b) Arătați că lungimea apotemei piramidei este egală cu 5 cm.  
c) Se secționează piramida cu un plan care trece prin mijlocul înălțimii  $DO$  și este paralel cu planul bazei. Calculați volumul trunchiului de piramidă astfel obținut.  
d) Punctul  $M$  este mijlocul laturii  $BC$ . Calculați valoarea tangentei unghiului determinat de planele  $(ABD)$  și  $(AMD)$ .
- ⓓ În trunchiul de piramidă triunghiulară regulată  $ABCA' B' C'$ , bazele sunt  $ABC$  și  $A' B' C'$ ,  $AB = 24$  cm,  $A' B' = 12$  cm, iar diagonalele unei fețe laterale sunt perpendiculare.  
b) Arătați că apotema trunchiului are lungimea de 18 cm.  
c) Calculați volumul trunchiului de piramidă. d) Calculați distanța de la punctul  $B$  la planul  $(A' B' C')$ .
- ⓔ Paralelipipedul dreptunghic  $ABCD A' B' C' D'$  are  $AB = 30$  cm și  $BC = AA' = 15$  cm.  
b) Calculați aria totală a paralelipipedului.  
c) Calculați tangenta unghiului determinat de dreapta  $A'C$  și planul  $(ABC)$ .  
d) Determinați poziția punctului  $M$  situat pe muchia  $BB'$  astfel încât perimetrul triunghiului  $AMC'$  să fie minim.
- ⓕ Prisma dreaptă  $ABCA' B' C'$  are ca baze triunghiurile echilaterale  $ABC$  și  $A' B' C'$ . Punctul  $O$  este centrul de greutate al bazei  $ABC$ ,  $AB = 12$  cm și  $AA' = 5$  cm.  
b) Calculați volumul prisme. c) Calculați distanța de la punctul  $O$  la dreapta  $A' B'$ .  
d) Calculați valoarea tangentei unghiului determinat de planele  $(ABC)$  și  $(A' B' O)$ .
- ⓖ Paralelipipedul dreptunghic  $ABCD A' B' C' D'$  are dimensiunile  $AB = AD = 8$  cm și  $AA' = 6$  cm.  
b) Calculați lungimea segmentului  $A'C$ .  
c) Calculați distanța de la punctul  $O$ , intersecția diagonalelor  $AC$  și  $BD$ , la dreapta  $A'C$ .  
d) Calculați valoarea sinusului unghiului determinat de planele  $(A'BD)$  și  $(C'BD)$ .
- ⓗ În piramida triunghiulară regulată  $VABC$ , latura bazei  $ABC$  este  $AB = 12$  cm și înălțimea piramidei  $VO = 6$  cm. Se notează cu  $D$  și  $E$  mijloacele muchiilor  $VA$  și respectiv  $VB$ .  
b) Calculați aria laterală a piramidei. c) Demonstrați că dreapta  $DE$  este paralelă cu planul  $(ABC)$ .  
d) Calculați măsura unghiului determinat de planele  $(DOE)$  și  $(ABC)$ .
- ⓘ Piramida triunghiulară regulată  $VABC$  are baza  $ABC$ . Muchia bazei  $AB = 12$  cm și muchia laterală  $AV = 12$  cm. Punctele  $M$  și  $N$  sunt mijloacele muchiilor  $BC$ , respectiv  $AV$ .  
b) Calculați volumul piramidei. c) Calculați măsura unghiului determinat de dreptele  $MN$  și  $AC$ .  
d) Fie  $O$  centrul de greutate al bazei și  $MN \cap VO = \{G\}$ . Arătați că punctul  $G$  se află la distanță egală de cele patru fețe ale piramidei.
- ⓙ Cubul  $ABCD A' B' C' D'$  are  $AB = 18$  cm.  
b) Calculați aria triunghiului  $A' C' B$ .  
c) Calculați distanța de la punctul  $B'$  la planul  $(A' C' B)$ .  
d) Calculați volumul piramidei triunghiulare regulate  $DA' BC'$ .
- ⓚ Într-o piramidă patrulateră regulată  $VABCD$  cu baza  $ABCD$ , muchia bazei este de  $6\sqrt{2}$  cm și volumul piramidei este egal cu  $144\sqrt{3}$  cm<sup>3</sup>. Punctul  $E$  este situat pe muchia  $AV$  astfel încât  $AE = 2 \cdot VE$ .  
b) Arătați că triunghiul  $VAC$  este echilateral.  
c) Calculați aria laterală a piramidei.  
d) Calculați distanța de la punctul  $E$  la planul  $(VBD)$ .
- ⓛ Prisma dreaptă  $ABCA' B' C'$  are ca baze triunghiurile echilaterale  $ABC$  și  $A' B' C'$  și lungimea înălțimii  $AA'$  de 4 cm. Punctul  $G$  este centrul de greutate al triunghiului  $A' B' C'$  și  $AG = 2\sqrt{7}$  cm.  
c) Calculați volumul prisme  $ABCA' B' C'$ .  
d) Fie punctul  $P$  mijlocul segmentului  $B' C'$ . Arătați că dreapta  $AC'$  este paralelă cu planul  $(A' BP)$ .