

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

## ETAPA LOCALĂ

8 februarie 2020

CLASA A XII-A

(3 ore/săptămână)

- 1.) Pe mulțimea  $\mathbb{R}$  definim legea de compoziție  $x * y = \frac{1}{5}(2x + 2y - mxy + 2)$ , oricare ar

fi  $x, y \in \mathbb{R}$ , și fie  $G = \left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$ .

- a) Determinați  $m \in \mathbb{R}$  știind că legea admite element neutru.  
 b) Pentru  $m = 3$  demonstrați că  $x * y \in G$  pentru orice  $x, y \in G$   
 c) Știind că pentru  $m = 3$ ,  $(G, *)$  este grup comutativ, determinați în acest caz parametrii reali  $a, b$  astfel încât funcția  $f : G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ,  $f(x) = ax + b$  să fie izomorfism de grupuri între  $(G, *)$  și  $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ .

- 2.) Fie în  $M_3(\mathbb{R})$  matricele:  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$  și  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Pentru fiecare  $t \in \mathbb{R}^*$  considerăm matricea:  $M_t = \frac{t}{3}A + \frac{1}{3t^2}B$ .

- a) Calculați  $A^2$ ,  $B^2$ ,  $AB$ .  
 b) Arătați că  $G = \{M_t / t \in \mathbb{R}^*\}$  este grup în raport cu înmulțirea matricelor.

- 3.) Fie funcția  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4}, x \in [0; 1] \\ \frac{1}{x(x^2 + 1)^2}, x \in (1; +\infty) \end{cases}$ .

- a) Arătați că  $f$  admite primitive.  
 b) Determinați primitivele funcției  $f$ .

- 4.) Fie funcția  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{xe^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}$ .

- a) Determinați domeniul de definiție a funcției  $f$ .  
 b) Calculați  $\int \frac{xe^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$ ,  $x \in E$ .

**Notă:**

**Toate subiectele sunt obligatorii.**

**Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.**

**Timp de lucru 3 ore.**