

„ADOLF HAIMOVICI” ALKALMAZOTT MATEMATIKA VERSENY

KÖRZETI SZAKASZ

2020. február 8.

XII. OSZTÁLY

(3 órás program)

- 1.) Az \mathbb{R} halmazon értelmezzük az $x * y = \frac{1}{5}(2x + 2y - mxy + 2)$ műveletet, bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén és legyen $G = \left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$.

- a) Határozd meg az $m \in \mathbb{R}$ értékét úgy, hogy a $*$ műveletre nézve létezzen semleges elem.
 b) Ha $m = 3$ igazold, hogy $x * y \in G$ bármely $x, y \in G$.
 c) Tudva, hogy $m = 3$ esetén $(G, *)$ egy kommutatív csoport, határozd meg ebben az esetben az a és b valós paramétereket úgy, hogy az $f : G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = ax + b$ függvény csoportizomorfizmus legyen a $(G, *)$ és (\mathbb{R}_+^*, \cdot) csoportok között.

- 2.) Adottak $M_3(\mathbb{R})$ -ban az $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixok. Bármely

$t \in \mathbb{R}^*$ esetén tekintsük az $M_t = \frac{t}{3}A + \frac{1}{3t^2}B$ mátrixot.

- a) Számítsd ki A^2 , B^2 , AB .
 b) Igazold, hogy $G = \{M_t / t \in \mathbb{R}^*\}$ egy csoport a mátrixok szorzására nézve.

- 3.) Adott $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4}, & x \in [0; 1] \\ \frac{1}{x(x^2 + 1)^2}, & x \in (1; +\infty) \end{cases}$ függvény.

- a) Igazold, hogy f primitiválható.
 b) Határozd meg az f függvény primitív függvényeit.

- 4.) Adott az $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{xe^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}$ függvény.

- a) Határozd meg az f függvény értelmezési tartományát.
 b) Számítsd ki $\int \frac{xe^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$, $x \in E$.

Megjegyzés:

Minden feladat kötelező.

Minden feladat 10 pontot ér.

Munkaidő 3 óra.