

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ

8 februarie 2020

BAREM

CLASA A XII-A

(3 ore/săptămână)

1.)	Din oficiu	1p
a)	Legea admite element neutru deduce că $x(-3-me)+2e+2=0, \forall x \in \mathbb{R}$	2p
	de unde $m=3$.	1p
b)	Din $x, y \in G \Rightarrow \left(x - \frac{2}{3}\right)\left(y - \frac{2}{3}\right) > 0$	1p
	de unde $-\frac{3}{5}\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(y - \frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3} < \frac{2}{3}$, de unde $x * y \in G$.	2p
c)	Din f morfism se obține $\frac{a}{5}(2x+2y-3xy+2)+b=a^2xy+abx+aby+b^2$ de unde	1p
	$a=-\frac{3}{5}$ și $b=\frac{2}{5}$, $f: G \rightarrow \mathbb{R}_+, f(x)=-\frac{3}{5}x+\frac{2}{5}$ bijectivă	2p

2.)	Din oficiu	1p
a)	Se arată că $A^2=3A, B^2=3B, AB=BA=O_3$	3p
b)	Putem arăta că $M_{t_1} \cdot M_{t_2} = M_{t_1+t_2}$. Se verifică axiomele grupului. Elementul neutru va fi M_1 și inversul unui element $M_{\frac{1}{t}}$, care este bine definit deoarece $t \in \mathbb{R}^*$	6p

3.)	Din oficiu	1p
a)	Dacă $x \in [0;1]$ f este continuă, dacă $x \in (1;+\infty)$ f este continuă Se verifică continuitatea în $x=1$, limite laterale. Rezultă f continuă pe $[0,+\infty) \Rightarrow f$ admite primitive pe $[0,+\infty)$	3p
b)	Determinăm $F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{8} + c_1, x \in [0;1] \\ \ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + c_2, x \in (1;+\infty) \end{cases}$	4p
	Din continuitate $c_1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \ln 2 + c_2$ Respectiv $F: [0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ $F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \ln 2 + c, x \in [0;1] \\ \ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + c, x \in (1;+\infty) \end{cases}$	2p

4.)	Din oficiu	1p
	<p>Determinarea domeniului de definiție</p> $\left. \begin{array}{l} 1 - x^2 > 0, \\ \arcsin x : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{array} \right\} \Rightarrow -1 < x < 1$	2p
	<p>Folosind metoda integrării prin părți</p> $I = \int \frac{x e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int e^{\arcsin x} \cdot \left(-\sqrt{1-x^2}\right)' dx = e^{\arcsin x} \cdot \left(-\sqrt{1-x^2}\right) + \int e^{\arcsin x} dx$	3p
	<p>Aplicând a doua oară a metoda integrării prin părți</p> $\int e^{\arcsin x} dx = \int (x)' e^{\arcsin x} dx = x e^{\arcsin x} - \int \frac{x e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx = x e^{\arcsin x} - I$	2p
	$I = -\sqrt{1-x^2} e^{\arcsin x} + x e^{\arcsin x} - I \Rightarrow I = \frac{1}{2} \left(-\sqrt{1-x^2} e^{\arcsin x} + x e^{\arcsin x} \right) + C$	2p