

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 8 februarie 2020

Clasa a VI-a

1.) a) Știind că

$$\frac{a}{4} = \frac{4b}{13} = \frac{c}{2} = \frac{d}{1}$$

și că

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 505$$

aflați numerele naturale a, b, c, d .

b) Scrieți numărul **2020** ca o sumă de patru pătrate perfecte.

Soluție:

a) Înmulțind cu $\frac{1}{4}$ fiecare raport din șirul $\frac{a}{4} = \frac{4b}{13} = \frac{c}{2} = \frac{d}{1}$ obținem

$$\frac{a}{16} = \frac{b}{13} = \frac{c}{8} = \frac{d}{4} = k \Rightarrow$$

1p

$$\Rightarrow a = 16k, b = 13k, c = 8k, d = 4k \Rightarrow$$

1p

$$\Rightarrow a^2 = 256k^2, b^2 = 169k^2, c^2 = 64k^2, d^2 = 16k^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 505k^2 = 505, \text{ deci } k^2 = 1.$$

1p

Pentru $k = 1$ avem $a = 16, b = 13, c = 8, d = 4$.

1p

b) $2020 = 4 \cdot 505 =$

1p

$$= 4 \cdot (16^2 + 13^2 + 8^2 + 4^2) =$$

1p

$$= 2^2 \cdot 16^2 + 2^2 \cdot 13^2 + 2^2 \cdot 8^2 + 2^2 \cdot 4^2 = 32^2 + 26^2 + 16^2 + 8^2$$

1p

2.) Se consideră punctele coliniare **A, B, C, D**. Știind că **AC = 8 cm**, **BC = 7 cm** și **AD = 9 cm**, determinați lungimea segmentului **[BD]**.

Soluție:

Sunt posibile 4 cazuri:

I.

BD = 6 cm

află doar un caz 2p

II.

BD = 24 cm

află și al doilea caz 2p

III.

BD = 8 cm

află și al treilea caz 2p

IV.

BD = 10 cm

află și al patrulea caz 1p

3.) Fie numerele $a = \frac{5^{74}+2}{2^{174}+5}$ și $b = \frac{5^{71}+2}{2^{161}+5}$. Arătați că $a < 0,4$ și $a < b$.

Soluție:

$$a < 0,4 \Leftrightarrow \frac{5^{74}+2}{2^{174}+5} < \frac{2}{5} \Leftrightarrow 5^{75}+10 < 2^{175}+10 \Leftrightarrow 5^{75} < 2^{175} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (5^3)^{25} < (2^7)^{25} \Leftrightarrow 125^{25} < 128^{25}, (A)$$

3p

$$b > 0,4 \Leftrightarrow \frac{5^{71}+2}{2^{161}+5} > \frac{2}{5} \Leftrightarrow 5^{72}+10 > 2^{162}+10 \Leftrightarrow 5^{72} > 2^{162} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (5^4)^{18} > (2^9)^{18} \Leftrightarrow 625^{18} > 512^{18}, (A)$$

3p

Din $a < 0,4$ și $0,4 < b$ rezultă $a < b$.

1p

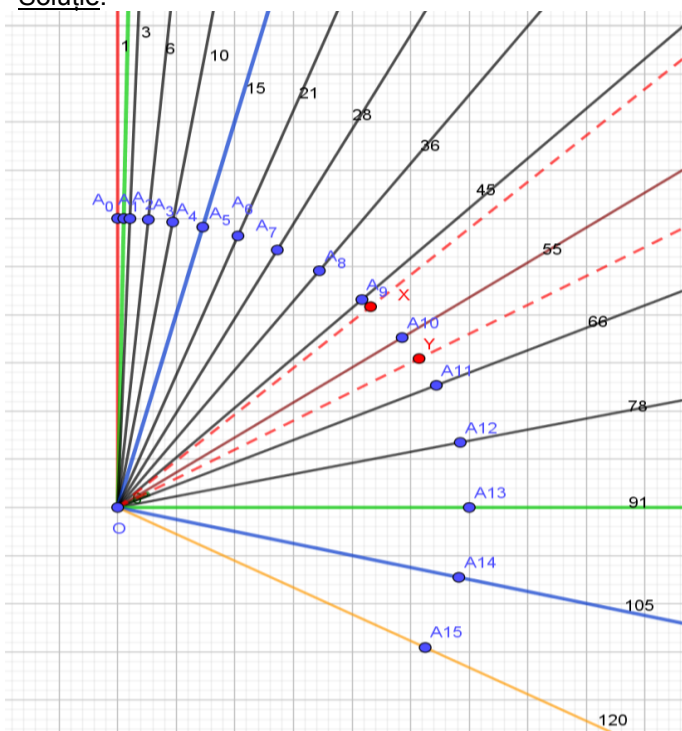
4.) Cu originea în punctul O se construiesc semidreptele $[OA_0, [OA_1, [OA_2, [OA_3, \dots, [OA_{15}$, astfel încât unghiurile formate în jurul punctului O să aibă măsurile:

$$\widehat{A_0OA_1} = 1^\circ, \widehat{A_1OA_2} = 2^\circ, \widehat{A_2OA_3} = 3^\circ, \dots, \widehat{A_{14}OA_{15}} = 15^\circ.$$

a) Aflați cele două unghiuri drepte care se formează.

b) Aflați măsura unghiului format de bisectoarele celor două unghiuri drepte.

Soluție:



a) Se calculează suma măsurilor unghiurilor,

începând cu $\widehat{A_0OA_1}$, obținând

$$1^\circ + 2^\circ + 3^\circ + \dots + 12^\circ = \frac{12 \cdot 13^\circ}{2} = 6 \cdot 13^\circ = 78^\circ,$$

$$1^\circ + 2^\circ + 3^\circ + \dots + 13^\circ = \frac{13 \cdot 14^\circ}{2} = 13 \cdot 7^\circ = 91^\circ, \quad 1p$$

deci în componența unui unghi drept trebuie să fie și unghiul de 13° , adică $\widehat{A_{12}OA_{13}}$.

$$90^\circ = 91^\circ - 1^\circ, \text{ deci un unghi drept este } \widehat{A_1OA_{13}} \quad 2p$$

$$1^\circ + 2^\circ + 3^\circ + \dots + 14^\circ = \frac{14 \cdot 15^\circ}{2} = 7 \cdot 15^\circ = 105^\circ.$$

$$1^\circ + 2^\circ + 3^\circ + 4^\circ + 5^\circ = 15^\circ.$$

$90^\circ = 105^\circ - 15^\circ$, deci cel de al doilea unghi drept este $\widehat{A_5OA_{14}}$.

2p

Unghiul de 15° nu poate fi în componența unui unghi drept, pentru că

$$1^\circ + 2^\circ + 3^\circ + \dots + 15^\circ = \frac{15 \cdot 16^\circ}{2} = 15 \cdot 8^\circ = 120^\circ,$$

$$\text{iar } 90^\circ + (1^\circ + 2^\circ + 3^\circ + 4^\circ + 5^\circ + 6^\circ + 7^\circ + 8^\circ) = 90^\circ + 36^\circ = 126^\circ \text{ și}$$

$$90^\circ + (1^\circ + 2^\circ + 3^\circ + 4^\circ + 5^\circ + 6^\circ + 7^\circ) = 90^\circ + 28^\circ = 118^\circ.$$

b) Bisectoarea unghiului $\widehat{A_1OA_{13}}$ este $[OX$, unde $\widehat{A_9OX} = 1^\circ$, iar bisectoarea unghiului $\widehat{A_5OA_{14}}$ este $[OY$, unde $\widehat{A_{10}OY} = 5^\circ$.

Deci $\widehat{XOY} = 14^\circ$.

1p

1p



Notă:

- *Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.*
- *Nu se acordă fracțiuni de punct.*
- *Se acordă punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.*