

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 8 februarie 2020**Clasa a V-a**
Barem de corectare și notare**SUBIECTUL I**

Aflați câte numere de forma $\overline{a5b}$ se pot scrie, știind că a și b sunt cifre distincte, care verifică egalitatea:

$$[3 + (a \cdot b + 31 \cdot 8 - 603:3):7] \cdot 2 + 1996 = 2020$$

Soluție:

$$[3 + (a \cdot b + 248 - 201):7] \cdot 2 = 24 \dots\dots\dots 1p$$

$$3 + (a \cdot b + 47):7 = 12 \dots\dots\dots 1p$$

$$(a \cdot b + 47):7 = 9 \dots\dots\dots 1p$$

$$a \cdot b + 47 = 63 \dots\dots\dots 1p$$

$$a \cdot b = 16 \dots\dots\dots 1p$$

Convin următoarele situații:

$$a=2, b=8 \Rightarrow \overline{a5b}=258 \dots\dots\dots 1p$$

$$a=8, b=2 \Rightarrow \overline{a5b}=852 \dots\dots\dots 1p$$

SUBIECTUL II

Se consideră numărul $N=7 \cdot 4^{10} + 7 \cdot 4^9 + 7 \cdot 4^8 + \dots + 7 \cdot 4^1 + 7$

- Demonstrați că N este număr impar;
- Determinați ultima cifră a numărului N;
- Arătați că $N+5^{2019}$ este divizibil cu 2 .

Soluție:

$$a) N=7 \cdot (4^{10} + 4^9 + 4^8 + \dots + 4^1) + 7 \dots\dots\dots 1p$$

$(4^{10} + 4^9 + 4^8 + \dots + 4^1)$ este număr par fiind o sumă de numere pare iar 7 este număr impar.

Deci, N= număr impar $\dots\dots\dots 1p$

$$b) U(N) = U[7 \cdot (4^{10} + 4^9 + 4^8 + \dots + 4^1) + 7]$$

$$U(4^{2n})=6, n \in \mathbb{N}^* \text{ iar } U(4^{2n+1})=4, n \in \mathbb{N} \dots\dots\dots 1p$$

Suma $(4^{10}+4^9+4^8+\dots+4^1)$ având cinci termeni cu exponent număr par și cinci termeni cu exponent număr impar, deducem:

$$U(4^{10}+4^9+4^8+\dots+4^1)=0 \dots\dots\dots 1p$$

$$U[7 \cdot (4^{10}+4^9+4^8+\dots+4^1)+7]=U(7 \cdot 0+7)=U(7)$$

$$\text{Deci } U(N)=7 \dots\dots\dots 1p$$

$$c) U(N+5^{2019})=U(7+5)=U(12)=2 \dots\dots\dots 1p$$

$$N+5^{2019}:2 \dots\dots\dots 1p$$

SUBIECTUL III

a) Calculați 42^2+16^2 ;

b) Scrieți numărul 2020^5 ca o sumă de două pătrate perfecte.

Soluție:

$$a) 42^2+16^2=2020 \dots\dots\dots 2p$$

$$b) 2020^5=2020^4 \cdot 2020= \dots\dots\dots 1p$$

$$=(2020^2)^2 \cdot 2020= \dots\dots\dots 1p$$

$$=(2020^2)^2 \cdot (42^2+16^2)= \dots\dots\dots 1p$$

$$=(2020^2)^2 \cdot 42^2 + (2020^2)^2 \cdot 16^2= \dots\dots\dots 1p$$

$$=(2020^2 \cdot 42)^2 + (2020^2 \cdot 16)^2 \dots\dots\dots 1p$$

SUBIECTUL IV

Să se afle trei numere naturale, știind că diferența dintre primul și al treilea este 76, împărțindu-l pe al doilea la al treilea obținem câtul 3 și restul 5, iar împărțindu-l pe primul la diferența dintre al doilea și al treilea obținem câtul 2 și restul 6.

Soluție:

Fie a, b, c – numerele căutate

$$a-c=76 \dots\dots\dots 1p$$

$$b=3 \cdot c+5 \dots\dots\dots 1p$$

$$a=2(b-c)+6 \dots\dots\dots 1p$$

$$a=4c+16$$

$$4c+16=c+76 \dots\dots\dots 1p$$

$$3c=60 \Rightarrow c=20 \dots\dots\dots 1p$$



$$a=4 \cdot 20+16 \Rightarrow a=96 \dots\dots\dots 1p$$

$$b=3 \cdot 20+5 \Rightarrow b=65 \dots\dots\dots 1p$$

Notă:

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct.
- Se acordă punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.