

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, 02.02.2020

CLASA a IX-a

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE



Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1, autor *Valentin Nicula*

Determinați numerele naturale n pentru care numărul $\sqrt{4n+1} + \sqrt{9n+13}$ este număr rațional.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\sqrt{m} + \sqrt{n} = r$, cu $r \in \mathbb{Q}^*$. Rezultă că $\sqrt{m} = r - \sqrt{n}$. Avem $m = r^2 - 2r\sqrt{n} + n$ și implicit $\sqrt{n} = \frac{r^2+n-m}{2r}$, de unde $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}^*$.	2p
Fie $p, q \in \mathbb{N}^*$, cu $(p, q) = 1$ astfel încât $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$. Avem $nq^2 = p^2$, de unde $n : p^2$. Rezultă $n = kp^2$, cu $k \in \mathbb{N}^*$ și implicit $kq^2 = 1$, de unde $q^2 = 1$. În concluzie $\sqrt{n} \in \mathbb{N}^*$ și din simetria relației $\sqrt{m} \in \mathbb{N}^*$.	1p
Fie $p, q \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $4n+1 = p^2$ și $9n+13 = q^2$. Rezultă că $4q^2 - 9p^2 = 43$ și implicit $(2q-3p)(2q+3p) = 43$.	2p
Din $2q-3p = 1$ și $2q+3p = 43$ obținem $q = 11$ și $p = 7$, de unde $n = 12$.	2p

Enunț subiect 2, autor *Mircea Țeca*

Fie numerele reale a și b cu proprietatea $[|a+b|] < 4$. Arătați că $[ab] < 4$.
(Pentru a real se notează $[a]$ partea întreagă a lui a și $|a|$ modulul lui a).

Detalii rezolvare	Barem asociat
Din $[a+b] < 4$ rezultă $[a+b] \leq 3$, de unde $ a+b < 4$.	2p
Ridicând la pătrat obținem $a^2 + 2ab + b^2 < 16$ și implicit $(a-b)^2 + 4ab < 16$. Rezultă că $4ab < 16$, de unde $ab < 4$.	4p
Cum $[ab] \leq ab$, obținem în concluzie $[ab] < 4$.	1p

Enunț subiect 3, autor *Costin Negrii - G.M.10/2019*

Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ecuația: $x^2 - y! = 2019$.
(Pentru n natural nenul se notează $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$, iar $0! = 1$).

Detalii rezolvare	Barem asociat
Pentru $y > 5$ numărul $y!$ este multiplu de 9 și cum 2019 este multiplu de 3, dar nu de 9, rezultă că x^2 este multiplu de 3 și nu de 9.	2p
Acest lucru nu este posibil, căci dacă x^2 se divide cu 3, atunci x^2 se divide și cu 9. Contradicția obținută arată că y este cel mult egal cu 5.	2p
Încercând toate valorile $y = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ singura care verifică $\sqrt{2019 + y!} \in \mathbb{N}$, este $y=3$ pentru care $x = 45$. În concluzie, avem soluția unică $x=45$ și $y=3$.	3p

Enunț subiect 4, autori *Petre Simion, Cristian Ciobănescu*

În pătratul $ABCD$, fie $M \in AC$. Paralela prin M la AD intersectează BD în N , paralela prin N la DC intersectează AC în P , iar paralela prin P la BC intersectează DB în Q . Punctele O_1, O_2, O_3 și O_4 sunt centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor MAB , NAB , PCB și respectiv NBC . Demonstrați că $\overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_3O_4} = \overrightarrow{QN}$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
N este ortocentrul triunghiului MAB , iar M este ortocentrul triunghiului NAB P este ortocentrul triunghiului NBC , iar N este ortocentrul triunghiului PBC	2p
Aplicăm Teorema lui Sylvester în triunghiurile MAB , NAB , PCB și NBC se obțin următoarele relații: $\overrightarrow{O_1N} = \overrightarrow{O_1A} + \overrightarrow{O_1B} + \overrightarrow{O_1M} \quad (1)$ $\overrightarrow{O_2M} = \overrightarrow{O_2N} + \overrightarrow{O_2A} + \overrightarrow{O_2B} \quad (2)$ $\overrightarrow{O_3N} = \overrightarrow{O_3P} + \overrightarrow{O_3B} + \overrightarrow{O_3C} \quad (3)$ $\overrightarrow{O_4P} = \overrightarrow{O_4N} + \overrightarrow{O_4B} + \overrightarrow{O_4C} \quad (4)$	2p
Prin scăderea relațiilor (1) și (2) obținem: $\overrightarrow{O_1N} - \overrightarrow{O_2M} = \overrightarrow{O_1A} + \overrightarrow{O_1B} + \overrightarrow{O_1M} - \overrightarrow{O_2N} - \overrightarrow{O_2A} - \overrightarrow{O_2B}$ de unde $\overrightarrow{O_1N} - \overrightarrow{O_2M} = (\overrightarrow{O_1A} + \overrightarrow{AO_2}) + (\overrightarrow{O_1B} + \overrightarrow{BO_2}) + \overrightarrow{O_1M} - \overrightarrow{O_2N}$ De aici $2\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{O_1O_2}$, adică $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{O_1O_2}$. Analog, prin scăderea relațiilor (3) și (4) se obține că $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{O_3O_4}$. De aici $\overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_3O_4} = \overrightarrow{QN}$, deoarece $MNPQ$ este pătrat.	3p