



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 2.02.2019
CLASA a VIII-a
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE**



Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1, autor Cristian Olteanu

- a) Arătați că $\frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$, unde $n \in \mathbb{N}^*$
- b) Aflați $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $1 + \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{1 \cdot 3}}} + \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{2 \cdot 4}}} + \frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{3 \cdot 5}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{(n-1) \cdot (n+1)}}} =$
 $= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2020+\sqrt{2018}}} + \frac{1}{\sqrt{2019+\sqrt{2017}}} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2018-\sqrt{2017}}} - 1 \right)$

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Ridicând la pătrat, obținem $\frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}} = \frac{1}{2}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})^2 \Leftrightarrow$	1p
$n-\sqrt{n^2-1} = \frac{1}{2}(n+1+n-1-2\sqrt{(n+1)(n-1)}) \Leftrightarrow n-\sqrt{n^2-1} = n-\sqrt{n^2-1}$	2p
b) Aplicând a) obținem $1 + \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{1 \cdot 3}}} + \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{2 \cdot 4}}} + \frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{3 \cdot 5}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{(n-1) \cdot (n+1)}}} =$ $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{1}) + \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{4}-\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{5}-\sqrt{3}) + \dots + \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}) =$ $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n} - \sqrt{2} - \sqrt{1}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n} - 1)$	2p
$\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2020+\sqrt{2018}}} + \frac{1}{\sqrt{2019+\sqrt{2017}}} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2018-\sqrt{2017}}} - 1 \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2020} + \sqrt{2019} - 1)$	1p
Obținem $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} = \sqrt{2020} + \sqrt{2019} \Rightarrow n = 2019$	1p

Enunț subiect 2, autor Traian Preda

Fie $ABCD A' B' C' D'$ un cub, M și N mijloacele muchiilor AA' , respectiv $C'D'$, iar O și O' centrele fețelor $BCC'B'$, respectiv $ADD'A'$.

- a) Demonstrați că $NO' \perp (B'CD')$
- b) Determinați sinusul unghiului dintre dreptele MO și NO' .

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) NO' linie mijlocie în $\triangle AC'D' \Rightarrow NO' \parallel AC'$	1p
$ACB'D'$ tetraedru regulat $\Rightarrow AG \perp (B'CD')$, unde G centrul triunghiului $B'CD'$	1p
$C'CB'D'$ piramidă triunghiulară regulată $\Rightarrow C'G \perp (B'CD')$	
$\Rightarrow AC' \perp (B'CD')$. Cum $NO' \parallel AC' \Rightarrow NO' \perp (B'CD')$	1p

b) Fie P mijlocul segmentului $CC' \Rightarrow OP \perp m$. în $\Delta BCC' \Rightarrow OP \parallel BC$ și $OP = \frac{BC}{2}$ Analog $MO' \parallel AD \parallel BC$ și $MO' = \frac{AD}{2} = \frac{BC}{2} \Rightarrow MOPO'$ paralelogram $\Rightarrow$ $MO \parallel O'P \Rightarrow m(\angle MO, NO') = m(\angle O'P, NO') = m(\angle NO'P)$	2p
În $\Delta NO'P$, $NP = a\sqrt{2}$, $O'P = a\sqrt{5}$, iar $NO' = a\sqrt{3}$, unde am notat $AB = 2a$	1p
Din reciproca teoremei lui Pitagora obținem $\Delta NO'P$ dreptunghic în N $\Rightarrow \sin(\angle NO'P) = \frac{NP}{O'P} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$	1p

Obs. La subpunctul b) se poate considera și Q mijlocul segmentului AB

Enunț subiect 3, autori Mihai Monea, Deva și Mihai Opincariu, Brad, G.M. 11/2019

Se consideră mulțimea $M = \{a^2 + 2b^2 \mid a, b \in \mathbb{N}\}$ și n un număr natural. Dacă $100n \in M$, demonstrați că $99n \in M$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
$100n = a^2 + 2b^2 \Rightarrow a^2 : 2 \Rightarrow a : 2 \Rightarrow b^2 : 2 \Rightarrow b : 2$	1p
Un pătrat perfect poate fi de forma $M_5, M_5 + 1$ sau $M_5 + 4$	1p
Cum $a^2 + 2b^2 : 5$, convine doar $a : 5$ și $b : 5 \Rightarrow a = 10x$ și $b = 10y \Rightarrow$	1p
$100n = 100x^2 + 200y^2 \Rightarrow n = x^2 + 2y^2 \Rightarrow n \in M$	1p
$9n = (3x)^2 + 2(3y)^2 \Rightarrow 9n \in M$	1p
Dacă notăm $9n = c^2 + 2d^2 \Rightarrow 99n = 11 \cdot 9n = (3^2 + 1^2 + 1^2)(c^2 + d^2 + d^2)$ $= (3c + d + d)^2 + (3c - d)^2 + (3c - d)^2 + (d - d)^2$ (Lagrange) $\Rightarrow$ $99n = (3c + 2d)^2 + 2(3c - d)^2 \Rightarrow 99n \in M$	2p

Obs. Alternativ $99n = (7^2 + 5^2 + 5^2)(x^2 + y^2 + y^2)$, etc.

Enunț subiect 4, autor Traian Preda

Fie $VABCD$ o piramidă cu baza $ABCD$ paralelogram. Considerăm punctele P, Q pe diagonala $[BD]$ astfel încât $BQ = DP = \frac{BD}{6}$, M mijlocul muchiei $[VD]$, iar $N \in (VB)$ astfel încât $VN = 3NB$. Demonstrați că:

- $(MPC) \parallel (AQN)$
- $RS \parallel (MPC)$, unde R și S sunt mijloacele segmentelor $[AM]$, respectiv $[NC]$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $DP = BQ = a \Rightarrow PQ = 4a$. Construim $VU \parallel MP \Rightarrow PU = DP = a$	1p
$UQ = 4a - a = 3a \Rightarrow \frac{UQ}{QB} = \frac{VN}{NB} = 3 \xrightarrow{R.T.Thales} NQ \parallel VU \parallel MP$	1p
$AQ \parallel CP$ ($AQCP$ paralelogram) $\Rightarrow (AQN) \parallel (MPC)$	2p
b) Fie $\{O\} = AC \cap BD \Rightarrow RO$ linie mijlocie în $\Delta AMC \Rightarrow RO \parallel MC, MC \subset (MPC)$ $\Rightarrow RO \parallel (MPC)$ (1)	1p
OS linie mijlocie în $\Delta ANC \Rightarrow OS \parallel AN, AN \subset (ANC) \Rightarrow OS \parallel (ANC) \parallel (MPC)$ (2)	1p
Din (1) și (2) $\Rightarrow (ORS) \parallel (MPC)$, dar $RS \subset (ORS) \Rightarrow RS \parallel (MPC)$	1p