

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, 02.02.2020



CLASA a XI-a

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1a), autor ***

Determinați toate matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care verifică ecuația $X^3 - 3X^2 + 3X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Ecuția devine $(X - I_2)^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$. Notăm $Y = X - I_2 \Rightarrow Y^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$	1p
$\det(Y^3) = 0 \Rightarrow \det(Y) = 0$. Din teorema Hamilton-Cayley avem: $Y^2 - tY = O_2 \Rightarrow Y^2 = tY \Rightarrow Y^3 = t^2Y$	1p
Așadar $t^2Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Tr}(t^2Y) = 5 \Rightarrow t^3 = 5 \Rightarrow t = \sqrt[3]{5} \quad (t \in \mathbb{R})$ $\Rightarrow Y = \frac{1}{\sqrt[3]{25}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$	1p
Obținem $X = I_2 + Y = I_2 + \frac{1}{\sqrt[3]{25}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$.	1p

Enunț subiect 1b), autor S. Moldoveanu

În mulțimea $\mathcal{M}_n(\{0, 1\})$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, vom spune că o matrice este simplă dacă pe fiecare linie a sa, între orice două elemente egale cu 1 nu avem niciun element egal cu 0. Demonstrați că orice matrice simplă are determinantul -1, 0 sau 1.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Vom demonstra afirmația prin inducție matematică. Verificarea cazului $n=2$	1p
Presupunem că orice matrice simplă cu j linii și j coloane are determinantul 0, 1 sau -1 și demonstrăm că orice matrice simplă cu $j+1$ linii și $j+1$ coloane are determinantul din aceeași mulțime. Dacă în matricea cu $j+1$ linii în prima coloană avem numai 0, atunci determinantul său este 0.	2p

Dacă avem cel puțin un element egal cu 1 în prima coloană, vom considera numai liniile care încep cu 1. Dintre acestea vom alege linia care are cele mai puține elemente egale cu 1 și o vom scădea din celelalte linii care încep cu 1 (dacă avem două linii care au același număr minim de valori 1, determinantul este 0). Rezultă că determinantul matricei inițiale este ± 1 înmulțit cu determinatul unei matrice simple cu j linii și j coloane. De aici rezultă concluzia.	
--	--

Enunț subiect 2, autori *Gheorghe Alexe, George-Florin Șerban*, GM 5/2019

Matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ verifică $AB = 2A + 3B$. Să se arate că $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$ și că matricele $A - 3I_n$ și $B - 2I_n$ sunt inversabile.

Detalii rezolvare	Barem asociat
$AB = 2A + 3B \Leftrightarrow AB - 2A - 3B + 6I_n = 6I_n \Leftrightarrow (A - 3I_n)(B - 2I_n) = 6I_n$, de unde aflăm că matricele $A - 3I_n$ și $B - 2I_n$ sunt inversabile.	3p
$AB = 2A + 3B \Leftrightarrow AB - 2A = 3B \Leftrightarrow A(B - 2I_n) = 3B \Leftrightarrow \Leftrightarrow A \left(\frac{1}{3}(B - 2I_n) \right) = B$	2p
Cum matricea $\frac{1}{3}(B - 2I_n)$ este inversabilă, deducem $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$.	2p



Enunț subiect 3, autor *George-Daniel Zidu*

Considerăm șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ astfel încât $x_1 \in [-2; 2]$ și $x_{n+1} = \frac{3x_n + 7}{x_n + 3}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se stabilească dacă există $p \in \mathbb{R}$, pentru care șirul $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ definit prin $y_n = n^p(\sqrt{7} - x_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$ să fie convergent către un număr real nenul.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Se arată prin inducție: $x_n \in [1; \sqrt{7})$, $\forall n \geq 2$. $x_1 \in [-2; 2] \Leftrightarrow \frac{2}{x_1 + 3} \in \left[\frac{2}{5}; 2\right] \Leftrightarrow 3 - \frac{2}{x_1 + 3} \in \left[1; \frac{13}{5}\right] \Leftrightarrow x_2 \in \left[1; \frac{13}{5}\right] \subset [1; \sqrt{7})$. Pentru $x_n \in [1; \sqrt{7})$ avem $\frac{2}{x_n + 3} \in \left(3 - \sqrt{7}; \frac{1}{2}\right] \Leftrightarrow 3 - \frac{2}{x_n + 3} \in \left[\frac{5}{2}; \sqrt{7}\right)$, de unde $x_{n+1} \in [1; \sqrt{7})$. De aici deducem că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este mărginit.	2p
Pentru monotonie: $x_{n+1} - x_n = \frac{3x_n + 7}{x_n + 3} - x_n = \frac{3x_n + 7 - x_n^2 - 3x_n}{x_n + 3} = \frac{7 - x_n^2}{x_n + 3} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, adică șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este monoton strict crescător. Din Weierstrass, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este convergent și are limita $\sqrt{7}$.	2p

Avem $y_n = n^p(\sqrt{7} - x_n) = \frac{n^p}{\frac{1}{\sqrt{7}-x_n}}$. Admitem că $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este convergent și notăm $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = l \in \mathbb{R}^*$. Șirul $z_n = \frac{1}{\sqrt{7}-x_n}$ este strict crescător și nemărginit.	1p
Fie $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^p - n^p}{\frac{1}{\sqrt{7}-x_{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{7}-x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p - 1 \right)}{\frac{1}{\sqrt{7} - \frac{3x_n+7}{x_n+3}} - \frac{1}{\sqrt{7}-x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p \left(\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p - 1}{\frac{1}{n}} \right) \cdot \frac{1}{n}}{\frac{x_n+3}{x_n\sqrt{7}+3\sqrt{7}-3x_n-7} - \frac{1}{\sqrt{7}-x_n}} =$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{pn^{p-1}}{\frac{x_n+3}{(\sqrt{7}-x_n)(3-\sqrt{7})} - \frac{1}{\sqrt{7}-x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{pn^{p-1}(\sqrt{7}-x_n)(3-\sqrt{7})}{\sqrt{7}+x_n} = \frac{pl(3-\sqrt{7})}{2\sqrt{7}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Din Stolz-Cesaro va trebui ca $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, adică $l = 0$, de unde aflăm că nu există p cu proprietatea cerută. Obs. În rezolvarea cerinței se poate utiliza criteriul cleștelui.	2p

Enunț subiect 4, autori Ana-Maria și Daniel Petriceanu



Fie $x_n = \{\sqrt{n-1}\} + \{\sqrt{n}\} + \{\sqrt{n+1}\}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Demonstrați că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ are un subșir cu limita 1.

b) Demonstrați că $\forall L \in [0, 3]$, există un subșir al șirului $(x_n)_{n \geq 1}$ care are limita L .

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $x_{4n^2} = \{\sqrt{4n^2-1}\} + \{\sqrt{4n^2}\} + \{\sqrt{4n^2+1}\} = \sqrt{4n^2-1} - (2n-1) + \sqrt{4n^2+1} - 2n =$	1p
$= \frac{4n^2-1-4n^2}{\sqrt{4n^2-1}+2n} + 1 + \frac{1}{\sqrt{4n^2+1}+2n} \rightarrow 1$	1p
b) Fie $a, b \in [0, 3]$, $a < b$ și $k > \max\left\{\frac{3}{b-a}; \frac{b^2}{6(3-b)}\right\}$. Alegem $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $[\sqrt{n-1}] = [\sqrt{n}] = [\sqrt{n+1}] = k \Leftrightarrow k^2 + 1 \leq n < (k+1)^2 - 1$.	1p
Demonstrăm că $\exists n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a < x_n < b$. $a < \{\sqrt{n-1}\} + \{\sqrt{n}\} + \{\sqrt{n+1}\} < b \Leftrightarrow a < \sqrt{n-1} + \sqrt{n} + \sqrt{n+1} - 3k < b$ $\Leftrightarrow a + 3k < \sqrt{n-1} + \sqrt{n} + \sqrt{n+1} < b + 3k$. Avem $\sqrt{n-1} + \sqrt{n} + \sqrt{n+1} < 3\sqrt{n}$. Punem condiția $3\sqrt{n} < b + 3k \Leftrightarrow n < \left(\frac{b+3k}{3}\right)^2$ Avem $\sqrt{n-1} + \sqrt{n} + \sqrt{n+1} > 3\sqrt{n-1}$. Punem condiția $3\sqrt{n-1} > a + 3k \Leftrightarrow n > 1 + \left(\frac{a+3k}{3}\right)^2$. Deoarece $\left(\frac{b+3k}{3}\right)^2 - \left(\frac{a+3k}{3}\right)^2 - 1 > 1 \Leftrightarrow$ $b^2 - a^2 + 6k(b-a) > 18$, este adevărată pentru că știm $k > \frac{3}{b-a}$. Deci $\exists n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $1 + \left(\frac{a+3k}{3}\right)^2 < n < \left(\frac{b+3k}{3}\right)^2$. (1)	2p
Deoarece $k^2 + 1 \leq n < (k+1)^2 - 1$, demonstrăm că valorile lui n, determinate în relația (1), verifică aceste inegalități: $k^2 + 1 \leq \left(\frac{a+3k}{3}\right)^2 + 1 \Leftrightarrow a \geq 0$ adevărată.	2p



$$\left(\frac{b+3k}{3}\right)^2 < (k+1)^2 - 1 \Leftrightarrow k > \frac{b^2}{6(3-b)} \text{ adevărată.}$$

Așadar, $\exists n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a < x_n < b$. Am demonstrat că $\{x_n | n \in \mathbb{N}^*\}$ este densă în $[0,3]$, deci $\forall L \in [0,3], \exists (x_{k_n})_n \subset (x_n)_n$ astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = L$.