

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, 02.02.2020

CLASA a X-a



SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1, autori *Ana-Maria* și *Daniel Petriceanu*

Determinați toate funcțiile injective $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică egalitatea

$$2 + f(x + y) = f(f(x) + y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Detalii rezolvare	Barem asociat
Fie $y \rightarrow x$ și $x \rightarrow y$. Obținem $2 + f(y + x) = f(f(y) + x)$.	2p
Rezultă $f(f(x) + y) = f(f(y) + x)$. Deoarece f este funcție injectivă se obține: $f(x) + y = f(y) + x, \forall x, y \in \mathbb{R}$.	2p
Pentru $y = 0$ și notând $f(0) = k$ rezultă că $f(x) = k + x, \forall x \in \mathbb{R}$.	2p
Obținem $2 + k + x + y = f(x) + y + k \Leftrightarrow f(x) = x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$.	1p

Enunț subiect 2, autor *Constantin Nicolau*, G.M.4/2019

Fie $u, v \in \mathbb{C}$, astfel încât $|u| = |v|$ și $2|u + v| \geq |u + 3v|$. Să se arate că $u = v$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Dacă $v = 0$, atunci, evident $u = v = 0$.	1p
Dacă $v \neq 0$, fie Dacă $z = \frac{u}{v}$. Condițiile devin $ z = 1$ și $2 z + 1 \geq z + 3 $	1p
Ridicând inegalitatea la pătrat, vom obține succesiv $4(z + 1)(\bar{z} + 1) \geq (z + 3)(\bar{z} + 3) \Leftrightarrow z + \bar{z} \geq 2$. (1)	3p
Dacă $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$ atunci (1) $\Leftrightarrow a \geq 1$. Însă $a^2 + b^2 = 1$ (2).	1p
Din (2) obținem $a = 1$ și deci $b = 0$, adică $z = 1$.	1p

Enunț subiect 3, autor *Eugen Radu*



Rezolvați ecuația $5 + \log_{12} \frac{x}{x^3+16} = x + \frac{2}{\sqrt{x-1}}$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Condiția de existență $x > 1$.	1p
Din inegalitatea mediilor avem $x + \frac{2}{\sqrt{x-1}} = 1 + (x-1) + \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} \geq 1 + 2\sqrt{(x-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}}} = 4$ (1)	2p
Egalitate pentru $x-1 = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow x = 2$	1p
Dar $x^3 + 16 = x^3 + 8 + 8 \geq 3\sqrt[3]{x^3 \cdot 8 \cdot 8} = 12x$, deci $\frac{x}{x^3+16} \leq \frac{1}{12}$, de unde rezultă că $5 + \log_{12} \frac{x}{x^3+16} \leq 4$. (2)	2p
Din (1) și (2) rezultă $x = 2$, care verifică ecuația dată.	1p

Enunț subiect 4, autor *Mihail Băluță*

Rezolvați ecuația $\cos^5 x \cos 5x - \sin^5 x \sin 5x = 1$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Ecuația se poate scrie echivalent $\cos^2 x (1 - \cos^3 x \cos 5x) + \sin^2 x (1 + \sin^3 x \sin 5x) = 0$ Deoarece $\cos^2 x (1 - \cos^3 x \cos 5x) \geq 0$ și $\sin^2 x (1 + \sin^3 x \sin 5x) \geq 0$ iar $\sin^2 x$ și $\cos^2 x$ nu pot fi simultan 0, egalitatea precedentă se realizează doar în cazurile:	2p
I) $\cos x = 0$ și $\sin^3 x \sin 5x = -1$, situație în care nu obținem nicio soluție, deoarece soluțiile primei ecuații nu o verifică și pe a doua;	1p
II) $\sin x = 0$ și $\cos^3 x \cos 5x = 1$, situație în care obținem soluțiile $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$;	2p
III) $\cos^3 x = \cos 5x = \pm 1$ și $\sin^3 x = -\sin 5x = \pm 1$, situație în care nu obținem nicio soluție, deoarece $\cos x = \pm 1 \Rightarrow \sin x = 0$.	1p
În concluzie, soluțiile ecuației sunt $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.	1p