

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați numărul complex z , știind că $3\bar{z} + 2z = 10 - 5i$, unde \bar{z} este conjugatul lui z .
- 5p** 2. Determinați valoarea parametrului real m știind că parabola asociată funcției $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + m - 1$ este tangentă la axa Ox .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{5}{4}\right)^x$.
- 5p** 4. Determinați numărul termenilor iraționali ai dezvoltării $(1 + \sqrt{2})^{300}$.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(3,5)$. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul A și este perpendiculară pe $d: 3x + 5y + 6 = 0$.
- 5p** 6. Fie ABC un triunghi în care $AB = 6$, $AC = 8$ și $BC = 2\sqrt{37}$. Calculați $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră sistemul
$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ ax + y - 2z = 1 \\ -x + 3y + z = b \end{cases}$$
, $a, b \in \mathbf{R}$ și A matricea asociată acestui sistem.
- 5p** a) Calculați $\det A$.
- 5p** b) Determinați valorile lui a pentru care rangul matricei A este egal cu 2.
- 5p** c) Determinați valorile lui a și b pentru care sistemul este incompatibil.
2. Pe mulțimea $G = \left(0; \frac{1}{2}\right)$ se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = \frac{xy}{6xy - 2x - 2y + 1}$.
- 5p** a) Determinați elementul neutru al legii de compoziție " \circ ".
- 5p** b) Determinați elementele simetrizabile din mulțimea G în raport cu legea " \circ ".
- 5p** c) Demonstrați că funcția $f: G \rightarrow \mathbf{R}_+^*$, $f(x) = \frac{1}{x} - 2$ este un izomorfism de la grupul (G, \circ) la grupul (\mathbf{R}_+^*, \cdot) .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = (x - 2)(x - 4)(x - 6)(x - 10) + 1$
- 5p** a) Calculați $f'(10)$.
- 5p** b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(n+1) - 1}{f(n) - 1} \right)^{2n}$.
- 5p** c) Arătați că ecuația $f'(x) = 0$ are exact trei soluții reale distincte.

Probă scrisă la matematică $M_{\text{mate-info}}$

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

2. Se consideră funcția $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f_n(x) = \frac{x^n}{e^x}$.

5p a) Fie $F_0 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ o primitivă a funcției f_0 care se anulează în $x=0$. Calculați $F_0(1)$.

5p b) Arătați că orice primitivă a funcției f_{2020} este concavă pe $(-\infty, 0)$.

5p c) Determinați toate numerele $n \in \mathbf{N}^*$ pentru care orice primitivă a lui f_n este convexă pe $(-\infty, 0)$.