

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

-
- 5p 1. Determinați rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $3a_{15} = a_7 + 2a_8 + 110$.
- 5p 2. Arătați că parabola asociată funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 3x - 5$ este situată sub axa Ox .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x - 4 \cdot 2^x + 3 = 0$.
- 5p 4. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr natural de două cifre \overline{ab} , acesta să fie pătrat perfect.
- 5p 5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,2)$, $B(-1,1)$ și $C(2, -1)$. Scrieți ecuația dreptei care trece prin punctul C și este paralelă cu dreapta AB .
- 5p 6. Fie ABC un triunghi în care $AB = 6$, $AC = 4$ și $BC = 5$. Calculați $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

-
1. Se consideră sistemul
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + ay + z = 1 \\ 4x + a^2y + z = 1 \end{cases}, a \in \mathbb{R}$$
 și A matricea asociată acestui sistem.
- 5p a) Arătați că $\det(A) = a^2 - 3a + 2$.
- 5p b) Determinați valorile lui a pentru care sistemul are soluție unică.
- 5p c) Pentru $a = 3$, rezolvați sistemul.
2. Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție "*" prin $x * y = 4xy + 5x + 5y + 5$.
- 5p a) Demonstrați că legea "*" este asociativă.
- 5p b) Determinați elementele simetrizabile ale mulțimii \mathbb{Z} în raport cu legea "*".
- 5p c) Rezolvați în \mathbb{Z} ecuația $\underbrace{x * x * x * \dots * x}_{2020 \text{ ori}} = -1$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

-
1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 5x + 7) \cdot e^x$.
- 5p a) Calculați $f'(x)$.
- 5p b) Scrieți ecuația asimptotei orizontale către $-\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Determinați punctele de extrem ale funcției f .
2. Fie funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{2x^2+1}{x}$.
- 5p a) Arătați că funcția $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $F(x) = x^2 + \ln x + 2020$ este o primitivă a funcției f .
- 5p b) Determinați o primitivă G a funcției f cu proprietatea că graficul lui G conține punctul $A(1, 2)$.
- 5p c) Demonstrați că dacă $H: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ este o primitivă a funcției f , atunci are loc inegalitatea :
- $$H(\sqrt[3]{2020}) < H(\sqrt[3]{2021}).$$

Probă scrisă la matematică M_șt-nat

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii