Simulare pentru Examenul de bacalaureat – 2020
Probă scrisă la matematică

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu $a_2=-12$ și $a_4=-6$. Calculați suma primilor 11 termeni ai progresiei.

5p **2.** Determinați perechea de numere reale (a,b) pentru care $\frac{2-4i}{1-i}=a+ib$, unde $i\in\mathbb{C}$, $i^2=-1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $1+\sqrt{x^2+3}=3x$.

5p **4.** Determinați numărul funcțiilor $f:\{0,1,2,3\}\to\{0,1,2,3\}$ cu proprietatea că $f(0)\cdot f(1)=0$.

5p **5.** Se consideră punctele A,B,C, astfel încât $\overrightarrow{AB}=6\vec{i}-8\vec{j}$ și $\overrightarrow{AC}=8\vec{i}+6\vec{j}$. Calculați lungimea medianei din A a triunghiului ABC.

5p **6.** Fie $\alpha\in\mathbb{R}$ cu proprietatea că $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$. Calculați $\sin 2\alpha$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricele $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ și $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ din mulțimea $M_3(\mathbb{R})$.

5p a) Rezolvați ecuația $\det(A+xI_3)=0$, $x\in\mathbb{R}$.

5p b) Demonstrați că matricea $B=A-I_3$ este inversabilă și că $(A-I_3)^{-1}=\frac{1}{2}\cdot A-I_3$.

5p c) Calculați A^n, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

2. Pe $\mathbb{R}$ definim legea de compoziție $x*y=x+y-xy$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

5p a) Arătați că $x*y=1-(1-x)(1-y)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

5p b) Demonstrați că mulțimea $G=(0,1)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție $*$

5p c) Arătați că $\frac{1}{2^2}*\frac{1}{3^2}*\ldots*\frac{1}{2020^2}=\frac{2019}{4040}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x\cdot(x-1)^2$.

5p a) Determinați ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției f .

5p b) Determinați punctele de extrem ale funcției f.

5p c) Demonstrați că $e^{x^2-x}>\dfrac{1}{(x+1)^2}, \forall x\in(0,1)$.

2. Se dă funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x\cdot\ln x$.

5p a) Calculați $\int_1^e \dfrac{f(x)}{x}dx$.

5p b) Arătați că orice primitivă a funcției f este convexă pe intervalul $\left(\dfrac{1}{e},\infty\right)$.

5p c) Fie $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)-f\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Determinați primitiva G a funcției g cu proprietatea că $G(e)=\dfrac{e^2}{4}$.

Simulare pentru Examenul de bacalaureat – 2020

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$r=3$, $a_1=-15$ $S_{11}=0$	**3p** **2p**
2.	$\frac{2-4i}{1-i}=\frac{(2-4i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=3-i$ $(a,b)=(3,-1)$	**3p** **2p**
3.	Prin ridicare la pătrat, $x^2+3=9x^2-6x+1 \Leftrightarrow 8x^2-6x-2=0$ Deci $x=1$ sau $x=-\frac{1}{4}$ Doar $x=1$ verifică ecuația deci este soluție	**2p** **2p** **1p**
4.	Numărul total de funcții ce se pot defini între cele două mulțimi este egal cu $4^4=256$ și scădem numărul celor care verifică $f(0)\cdot f(1)\neq 0$ Cum $f(0)\in\{1,2,3\}, f(1)\in\{1,2,3\}, f(2), f(3)\in\{0,1,2,3\}$ avem $256-3\cdot 3\cdot 4\cdot 4=112$ funcții cu proprietatea din enunț	**2p** **2p** **1p**
5.	$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=7\vec{i}-\vec{j}$ $\vert\overrightarrow{AM}\vert=\sqrt{49+1}=5\sqrt{2}$	**3p** **2p**
6.	Din relația dată în enunț rezultă că $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{2}$ Prin ridicare la pătrat, $1-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{4}\Rightarrow\sin 2\alpha=\frac{3}{4}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A+xI_3)=x^2\cdot(x+3)$ $\det(A+xI_3)=0\Leftrightarrow x\in\{-3,0\}$	**3p** **2p**
b)	$\det B=2\neq 0\Rightarrow$ $B=A-I_3$ este matrice inversabilă Demonstrează că $(A-I_3)^{-1}=\frac{1}{2}\cdot A-I_3$	**2p** **3p**
c)	$A^2=3A, A^3=3^2A$	**2p**

	Utilizând metoda inducției matematice, demonstrează că $A^n = 3^{n-1} \cdot A,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$	3p
2.a)	$x * y = 1 - 1 + x + y - xy = 1 - (1-x) + y(1-x)$ $x * y = 1 - (1-x)(1-y)$	3p 2p
b)	$1-(1-x)(1-y) < 1 \Leftrightarrow (1-x)(1-y) > 0$, adevărat pentru $\forall x, y \in (0,1)$ $1-(1-x)(1-y) > 0 \Leftrightarrow (1-x)(1-y) < 1$, adevărat pentru $\forall x, y \in (0,1)$	3p 2p
c)	$\frac{1}{2^2} * \frac{1}{3^2} * \ldots * \frac{1}{2020^2} = 1 - \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{2020^2}\right) =$ $1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \frac{2020}{2019} \cdot \frac{2019}{2020} \cdot \frac{2021}{2020} = 1 - \frac{2021}{4040} = \frac{2019}{4040}$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{(x-1)^2}{e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2(x-1)}{-e^{-x}} =$ $= \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0$ deci $y = 0$ este ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f	3p 2p
b)	$f'(x) = e^x \cdot (x^2 - 1)$ f strict crescătoare pe $(-\infty, -1)$ și strict descrescătoare pe $(-1, 1)$, deci $x = -1$ punct de maxim local pentru f f strict descrescătoare pe $(-1, 1)$ și strict crescătoare pe $(1, \infty)$, deci $x = 1$ punct de minim local pentru f	2p 3p
c)	$x \in (0,1) \Rightarrow x^2 \in (0,1)$ și $x^2 < x$. Cum f este strict descrescătoare pe $(0,1)$ rezultă că $f(x^2) > f(x)$ Deci $f(x^2) > f(x) \Rightarrow e^{x^2} \cdot (x^2 - 1)^2 > e^x \cdot (x-1)^2$ După simplificări rezultă că $e^{x^2 - x} > \frac{1}{(x+1)^2}, \forall x \in (0,1)$	2p 2p 1p
2.a)	$\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx = \int_1^e \ln x dx = x \ln x \Big\vert_1^e - \int_1^e 1 dx =$ $= e - (e-1) = 1$	3p 2p
b)	Fie F o primitivă a funcției f deci $F'(x) = f(x), F''(x) = f'(x), \forall x \in (0, \infty)$ $F''(x) = \ln x + 1 > 0, \forall x \in \left(\frac{1}{e}, \infty\right)$ deci F este convexă pe $\left(\frac{1}{e}, \infty\right)$	3p 2p
c)	$\int g(x) dx = \int x \ln x dx + \int \frac{1}{x} \ln x dx$ iar o primitivă G a funcției g este de forma	1p

	$G(x)=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+\frac{(\ln x)^2}{2}+k$	3p
	Din condiția $G(e)=\frac{e^2}{4}\Rightarrow k=-\frac{1}{2}$ și $G(x)=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+\frac{(\ln x)^2}{2}-\frac{1}{2}$	1p