



Teză semestrul I clasa a 12-a, 28.11.2019
MATEMATICĂ –matematică-informatică
BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
 - Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
 - Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.
- SUBIECTUL I

1.	\Leftrightarrow "o" comutativa $\Leftrightarrow x \circ y = y \circ x, \forall x, y \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x \circ y = xy + mx + 15y + 1 \\ y \circ x = yx + my + 15x + 1 \end{cases} \Rightarrow mx + 15y = my + 15x, \forall x, y \in \mathbb{R}$ $(m-15)(x-y) = 0, \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ (si pt. } x \neq y) \Rightarrow m-15 = 0 \Rightarrow m = 15$	1p 2p 2p
2.	$x * 1 = \frac{4(x+1)}{4+x} \Rightarrow$ ecuația devine $\frac{4(x+1)}{4+x} = 1 \Leftrightarrow 4x+4 = 4+x \Rightarrow 3x = 0$ Finalizare : $x = 0$	1p 3p 1p
3.	$x \in \mathbb{Z}_6 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}\}$ dintre care $\hat{0}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{5}$ verifică ecuația $\hat{1}, \hat{4}$ nu verifică ecuația Finalizare : $x \in \{\hat{0}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{5}\}$	2p 2p 1p
4.	Facand schimbarea de variabilă $\sin x = t \Rightarrow \cos x dx = dt$	2p
a)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2019} \cos x dx = \int_0^1 t^{2019} dt = \frac{t^{2020}}{2020} \Big _0^1 = \frac{1}{2020}$	3p
4.	$\int_0^1 \frac{x+1}{e^x} dx = \int_0^1 (x+1)(-e^{-x})' dx = -(x+1)e^{-x} \Big _0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx =$	3p
b)	$= -(2e^{-1} - 1) - e^{-x} \Big _0^1 = -\frac{2}{e} + 1 - \left(\frac{1}{e} - 1\right) = \frac{2e-3}{e}$	2p
4.	$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{2} \Big _0^1 = \arcsin \frac{1}{2} - \arcsin 0 =$	3p
c)	$= \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}$	2p


SUBIECTUL al II-lea

1.	a)	$(x-5)(y-5) + 5 = xy - 5x - 5y + 25 + 5 =$ $= xy - 5x - 5y + 30 = x \circ y, \forall x, y \in \mathbb{Q}$	3p 2p
----	----	--	----------

		<p>f izomorfism \Leftrightarrow 1) f morfism și 2) f bijectivă</p> <p>1) $f(xy) = f(x) \circ f(y), \forall x, y \in \mathbb{Q}$</p> <p>$f(xy) = xy - 5$</p> <p>$f(x) \circ f(y) = (f(x) - 5)(f(y) - 5) + 5 = (x + 5 - 5)(y + 5 - 5) + 5 = xy - 5 = f(xy)$</p>	1p
	b)	<p>2) f injectivă</p> <p>$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \mathbb{Q}, \text{cu } f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2 \Leftrightarrow x_1 + \cancel{5} = x_2 + \cancel{5} \rightarrow x_1 = x_2$</p> <p>$f$ surjectivă $\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{Q}, \exists x \in \mathbb{Q}, \text{astfel încât } f(x) = y$</p> <p><i>pt.</i> $\forall y \in \mathbb{Q}, x + 5 = y \rightarrow \exists x = y - 5 \in \mathbb{Q}, f(x) = f(y - 5) = y$</p>	2p 1p 1p
	c)	<p>$\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de 2020 ori}} = (x - 5)^{2020} + 5$</p> <p>Ecuția devine $(x - 5)^{2020} + 5 = 6 \Leftrightarrow (x - 5)^{2020} = 1 \Rightarrow x - 5 = 1 \text{ sau } x - 5 = -1$</p> <p>$\Rightarrow x \in \{4, 6\}, 4, 6 \in \mathbb{Q}.$</p>	2p 2p 1p
2.	a)	<p>Pentru $a = 2 \in \mathbb{Z}$ și $b = 1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$</p> <p>$a^2 - 3b^2 = \det A = 1$, deci $A \in G$.</p>	3p 2p
	b)	<p>Fie matricele $A = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} m & 3n \\ n & m \end{pmatrix}$ cu $a, b, m, n \in \mathbb{Z}$ și</p> <p>$a^2 - 3b^2 = \det A = 1, m^2 - 3n^2 = \det B = 1$</p> <p>Prin calcul se obține că $AB = \begin{pmatrix} am + 3bn & 3(an + bm) \\ an + bm & am + 3bn \end{pmatrix}$ cu $am + 3bn$ și</p> <p>$an + bm \in \mathbb{Z}$</p> <p>$\det(AB) = \det A \cdot \det B = 1$. Obținem astfel, că $AB \in G$.</p>	1p 3p 1p
	c)	<p>$\forall A = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \in G, \det A = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow A$ inversabilă</p> <p>$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & 3(-b) \\ (-b) & a \end{pmatrix}, a, (-b) \in \mathbb{Z}$</p> <p>$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = 1$, deci $A^{-1} \in G$.</p>	1p 3p 1p

SUBIECTUL al III-lea

1.	a)	<p>F este o primitivă a funcției $f \Leftrightarrow F$ derivabilă și $F'(x) = f(x), \forall x \in (0, \infty)$</p> <p>$F$ este o funcție derivabilă (operații cu funcții elementare)</p> <p>Se calculează derivata funcției F și se obține că $F'(x) = f(x), \forall x \in (0, \infty)$.</p>	1p 1p 3p
	b)	<p>G este crescătoare pe $[1, \infty)$ dacă $G'(x) = f(x) \geq 0, \forall x \in [1, \infty) \Leftrightarrow f(x) \geq 0, \forall x \in [1, \infty)$</p> <p>Cum $x \geq 1 \Rightarrow \ln x \geq 0, \sqrt{x} > 0 \Rightarrow f(x) \geq 0 \forall x \in [1, \infty) \Rightarrow G$ crescătoare pe $[1, \infty)$.</p>	3p 2p
	c)	<p>Din punctul a) $F'(x) = f(x)$</p> <p>Atunci, $\int_1^e f(x) dx = \int_1^e F'(x) dx = F(x) _1^e =$</p> <p>$= 2\sqrt{e}(1-2) - 2 \cdot (-2) = 4 - 2\sqrt{e}.$</p>	1p 3p 1p
2.	a)	<p>$I_{2018} + I_{2019} + I_{2020} = \int_0^1 \frac{x^{2018}}{x^2 + x + 1} dx + \int_0^1 \frac{x^{2019}}{x^2 + x + 1} dx + \int_0^1 \frac{x^{2020}}{x^2 + x + 1} dx =$</p>	1p

	$= \int_0^1 \frac{x^{2018} + x^{2019} + x^{2020}}{x^2 + x + 1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2018} (x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1} dx =$ $= \frac{x^{2019}}{2019} \Big _0^1 = \frac{1}{2019}.$		3p 1p
b)	$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{x^2 + x + 1} dx \leq 0, \forall x \in [0,1] \forall n \in \mathbb{N}^*$		2p
	<p>pt. că $x^n \geq 0, x-1 \leq 0, x^2 + x + 1 < 0 (\Delta < 0) \Rightarrow (I_n)_{n \geq 1}$ descrescător.</p> $0 \leq I_n \leq I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x^2 + x + 1} dx < \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \Rightarrow (I_n)_{n \geq 1}$ mărginit.		1p 2p
c)	$x^n \geq 0 \text{ si } x^2 + x + 1 \geq 1, \forall x \in [0,1] \Rightarrow 0 \leq \frac{x^n}{x^2 + x + 1} \leq \frac{x^n}{1} \forall x \in [0,1]$ și integând obținem:		3p
	$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} \forall x \in [0,1] \forall n \in \mathbb{N}^*$ <p>Trecând la limită, se obține, folosind criteriul cleștelui $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} I_n \leq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$</p>		1p 1p

TEZĂ CU SUBIECT UNIC –CLASA A 12-a MATEMATICĂ – INFORMATICĂ *Semestrul I 2019-2020*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete. Se acordă 10 puncte din oficiu.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât legea de compoziție " \circ " să fie comutativă pe \mathbb{R} , unde
 $x \circ y = xy + mx + 15y + 1$.
- 5p 2. Pe mulțimea $G = (-2, 2)$ se consideră legea $x * y = \frac{4(x+y)}{4+xy}, \forall x, y \in G$. Rezolvați în G ecuația $x * 1 = 1$.
- 5p 3. Să se rezolve ecuația $x^2 + x = \hat{0}$ în grupul $(\mathbb{Z}_6, +)$.
4. Să se calculeze următoarele integrale:
- 5p a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2019} \cos x dx$;
- 5p b) $\int_0^1 \frac{x+1}{e^x} dx$;
- 5p c) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$.



SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Pe mulțimea numerelor raționale se consideră legea de compoziție $x \circ y = xy - 5x - 5y + 30, \forall x, y \in \mathbb{Q}$.
- 5p a) Demonstrați că $x \circ y = (x-5)(y-5) + 5, \forall x, y \in \mathbb{Q}$.
- 5p b) Știind că (\mathbb{Q}, \circ) este grup abelian, arătați că $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, f(x) = x+5$ este izomorfism de la grupul (\mathbb{Q}, \cdot) la (\mathbb{Q}, \circ) .
- 5p c) Rezolvați ecuația $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de 2020 ori}} = 6$.
2. Se consideră mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ și } a^2 - 3b^2 = 1 \right\}$ și operația de înmulțire a matricelor.
- 5p a) Arătați că matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in G$.
- 5p b) Demonstrați că dacă $A, B \in G$, atunci $AB \in G$.
- 5p c) Demonstrați că toate elementele mulțimii G sunt inversabile și că $A^{-1} \in G, \forall A \in G$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.
- 5p a). Să se arate că funcția $F: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = 2\sqrt{x}(\ln x - 2)$, este o primitivă a funcției f .
- 5p b). Să se arate că orice primitivă G a funcției f este crescătoare pe $[1, \infty)$.
- 5p c). Să se calculeze $\int_1^e f(x) dx$.
2. Fie $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + x + 1} dx, n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p a) Calculați $I_{2018} + I_{2019} + I_{2020}$.
- 5p b) Arătați că șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este monoton și mărginit.
- 5p c) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.