

TEZA CU SUBIECT UNIC
An școlar 2019-2020 semestrul I
Matematică științe ale naturii
28.11.2019 - Clasa a XII-a



Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii.

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

Subiectul I (30 p)

(5p) 1. Calculați: $4 + 6 - 5 \cdot 6$ în Z_7

(5p) 2. Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție $x * y = 7x + 7y - 3xy - 14$. Calculați $3 * 4$.

(5p) 3. Pe \mathbf{R} se consideră legea de compoziție: $x * y = xy - 2x - 2y + 6, \forall x, y \in \mathbf{R}$.
Să se determine elementul neutru al legii de compoziție „*”

(5p) 4. Să se calculeze: $\int_1^e \left(3 + 5x + \frac{1}{x} \right) dx$

(5p) 5. Se consideră funcțiile :

$$f, F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = e^{2x}(2x + 5), F(x) = e^{2x}(x + 2).$$

Să se demonstreze că funcția F este o primitivă a funcției f.

(5p) 6. Să se calculeze: $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos x dx$.

Subiectul II (30p)

1. Pe \mathbf{R} se consideră legea de

compoziție: $x * y = xy + 3x + 3y + 6, \forall x, y \in \mathbf{R}$.

(5p) a) Să se demonstreze egalitatea $x * y = (x + 3)(y + 3) - 3, \forall x, y \in \mathbf{R}$

(5p) b) Să se rezolve ecuația $x * (x + 1) = -3, x \in \mathbf{R}$.

(5p) c) Să se calculeze $(-2019) * (-2018) * \dots * 2018 * 2019$.

2. Se consideră matricea $A_x = \begin{pmatrix} 2019^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$, pentru $x \in \mathbf{R}$ și mulțimea

$$M = \{A_x | x \in \mathbf{R}\} \subset M_3(\mathbf{R}).$$

(5p) a) Să se verifice că $I_3 \in M$, unde $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(5p) b) Să se demonstreze că $A_x \cdot A_y = A_{x+y}, \forall x, y \in \mathbf{R}$.

(5p) c) Calculați $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \dots \cdot A_{10}$.

Subiectul III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \leq 1 \\ \frac{\ln^2 x}{x}, & x > 1 \end{cases}$



(5p) a) Să se arate că funcția f admite primitive pe \mathbb{R} .

(5p) b) Calculați $\int_0^1 f(x) dx$.

(5p) c) Arătați că primitiva $F(x)$ a funcției $f(x)$ este strict crescătoare pe $(1, \infty)$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = xe^x$.

(5p) a) Să se determine $\int_0^1 f(x)e^{-x} dx$

(5p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$

(5p) c) Să se calculeze $\int_1^2 \frac{f(x^2)}{x} dx$.

Barem de rezolvare -Teza semestrul I-Matematică științe ale naturii

An școlar 2019-2020 -Clasa a XII-a

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii



SUBIECTUL I (30 p)

| | | |
|---|---------------------------------------|----|
| 1 | 1. | 5p |
| 2 | $3 * 4. = -1$ | 5p |
| 3 | se scrie definiția elementului neutru | 3p |
| | se calculează și se obține $e=3$ | 2p |
| 4 | $l = 3e + 5e^2/2 - 9/2$ | 5p |
| 5 | $F'(x) = f(x).$ | 5p |
| 6 | $l = x \sin x + \cos x$ | 3p |
| | $l = \pi\sqrt{3}/6 - 1/2$ | 2p |

SUBIECTUL II (30p)

| | | |
|----|--|----|
| 1a | demonstrație | 5p |
| 1b | $x * (x + 1) = (x + 3)(x + 4) - 3$ | 2p |
| | $(x + 3)(x + 4) - 3 = -3$ | 2p |
| | $X \in \{-3, -4\}$ | 1p |
| 1c | verificare $(-3) * (x) = -3$ | 2p |
| | $(x) * (-3) = -3$ | 2p |
| | $(-2019) * (-2018) * \dots * 2018 * 2019 = -3$ | 1p |
| 2a | $A_0 = \begin{pmatrix} 2019^0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \} \Rightarrow I_3 \in M$ $A_0 \in G$ | 5p |
| 2b | $A_x \cdot A_y = \begin{pmatrix} 2019^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2019^y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2019^{x+y} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x+y & 1 \end{pmatrix} =$ | 2p |
| | $= A_{x+y}, \forall x, y \in R$ | 3p |
| 2c | din b rezultă că $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \dots \cdot A_{10} = A_{1+2+3+\dots+10}$. | 2p |
| | $A_{1+2+3+\dots+10} = A \begin{pmatrix} 2019^{1+2+\dots+10} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1+2+\dots+10 & 1 \end{pmatrix}$ | 2p |
| | $A \begin{pmatrix} 2019^{55} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 55 & 1 \end{pmatrix}$ | 1p |

SUBIECTUL III (30p)

| | | |
|-----------|--|-----------|
| 1a | verificarea continuității funcției | 2p |
| | concluzia | 3p |
| 1b | $\int_0^1 (x^2 - x) dx$ | 2p |
| | $= \frac{x^3}{3} \Big _0^1 - \frac{x^2}{2} \Big _0^1 = -\frac{1}{6}$ | 3p |
| 1c | primitiva $F(x)$ a funcției $f(x)$ este strict crescătoare pe $(1, \infty)$ dacă | 2p |
| | $F'(x) = f(x) > 0$ $f(x) > 0$ | 3p |
| 2a | $\int_0^1 f(x)e^{-x} dx = \int_0^1 xe^x e^{-x} dx = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big _0^1 = \frac{1}{2}$ | 5p |
| 2b | se folosește integrarea prin părți | 1p |
| | $\int_0^1 xe^x dx = (xe^x - e^x) \Big _1^0 = 1$ | 4p |
| 2c | $u = x^2$ | 1p |
| | $l = e^{u/2}$ | 2p |
| | $l = \int_1^2 \frac{f(x^2)}{x} dx = \frac{e^4 - e}{2}$ | 2p |

TEZA CU SUBIECT UNIC
An școlar 2019-2020 semestrul I
Matematică științe ale naturii
28.11.2019 - Clasa a XII-a

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii.

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.



Subiectul I (30 p)

(5p) 1. Calculați: $4+6-5\cdot 6$ în Z_7

(5p) 2. Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție $x * y = 7x + 7y - 3xy - 14$. Calculați $3 * 4$.

(5p) 3. Pe \mathbf{R} se consideră legea de compoziție: $x * y = xy - 2x - 2y + 6, \forall x, y \in \mathbf{R}$. Să se demonstreze că $G = (2, \infty)$ este parte stabilă a lui \mathbf{R} în raport cu legea de compoziție „*”

(5p) 4. Sa se calculeze: $\int_1^e \left(3 + 5x + \frac{1}{x} \right) dx$

(5p) 5. Se consideră funcțiile :

$$f, F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = e^{2x}(2x + 5), F(x) = e^{2x}(x + 2).$$

Să se demonstreze că funcția F este o primitivă a funcției f .

(5p) 6. Să se calculeze: $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos x dx$.

Subiectul II (30p)

1. Pe \mathbf{R} se consideră legea de

compoziție: $x * y = xy + 3x + 3y + 6, \forall x, y \in \mathbf{R}$.

(5p) a) Să se demonstreze egalitatea $x * y = (x + 3)(y + 3) - 3, \forall x, y \in \mathbf{R}$

(5p) b) Să se rezolve ecuația $x * (x + 1) = -3, x \in \mathbf{R}$.

(5p) c) Să se calculeze $(-2019) * (-2018) * \dots * 2018 * 2019$.

2. Se consideră matricea $A_x = \begin{pmatrix} 2019^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$, pentru $x \in \mathbf{R}$ și mulțimea

$$M = \{A_x | x \in \mathbf{R}\} \subset M_3(\mathbf{R}).$$

(5p) a) Să se verifice că $I_3 \in M$, unde $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(5p) b) Să se demonstreze că $A_x \cdot A_y = A_{x+y}, \forall x, y \in \mathbf{R}$.

(5p) c) Să se arate că (M, \cdot) este grup comutativ.



Subiectul III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x < 1 \\ \frac{\ln^2 x}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$



(5p) a) Să se arate că funcția f admite primitive pe \mathbb{R} .

(5p) b) Arătați că primitiva $F(x)$ a funcției $f(x)$ este strict crescătoare pe $[1, \infty)$.

(5p) c) Determinați acea primitivă $F(x)$ a funcției $f(x)$ care îndeplinește condiția $F(e)=1$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = xe^x$.

(5p) a) Să se determine $\int_0^1 f(x)e^{-x} dx$.

(5p) b) Să se arate că $\int_0^1 f''(x) dx = 2e - 1$, unde f'' este derivata a doua a funcției f .

(5p) c) Să se calculeze $\int_1^2 \frac{f(x^2)}{x} dx$.