INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN ILFOV — GUVERNUL ROMÂNIEI — MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

TEZA CU SUBIECT UNIC
An scolar 2019-2020 semestrul I
Matematică *tehnologic*
28.11.2019 - Clasa a XII-a

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 p)

(5p) **1.** Calculați $\hat{2}\cdot(\hat{1}+\hat{4})+\hat{3}$ în $\boldsymbol{Z_6}$.

(5p) **2.** Pe **Z** definim operația $x * y = x + y + 5$. Calculați $2 * (-7)$.

(5p) **3.** Verificați dacă legea de compoziție $x \circ y = xy + x + y$ este comutativă pe $\boldsymbol{R}$.

(5p) **4.** Calculați $\int \frac{1}{x^2-9}dx, x > 3$.

(5p) **5.** Să se determine primitiva funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 1$ care se anulează în x=2.

(5p) **6.** Fie funcțiile $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2 - x\ , g(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x$. Să se arate că g este o primitivă a lui f pe $\mathbb{R}$.

Subiectul II (30p)

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție
$x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$.

(5p) **a)** Arătați că $x \circ y = (x+4)(y+4) - 4, \forall x, y \in \boldsymbol{R}$.

(5p) **b)** Determinați elementul neutru al legii " $\circ$ ".

(5p) **c)** Rezolvați in R ecuația $x \circ x$ =12.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x + y + 3$.

(5p) **a)** Să se arate că legea este asociativă.

(5p) **b)** Determinați numărul real *x* pentru care $x^2 * (x+1) = 6$.

(5p) **c)** Calculați $1*2*3*...*10$.

Subiectul III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}, f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \geq 1 \\ x^2+x+1, & x < 1 \end{cases}$.

(5p) **a)** Să se arate că funcția f admite primitive pe **R**.

(5p) **b)** Pentru $x \geq 1$, să se determine primitiva F, $F: (0; \infty) \to R$ a funcției f, care verifică $F(2) = 7$.

(5p) **c)** Calculați $\int_0^2 (f(x))dx$.

2. Se consideră funcțiile $f, F: (0; \infty) \to \boldsymbol{R}, f(x) = 3x^2 + 1 + \frac{1}{x}$ și $F(x) = x^3 + x + lnx - 2$.

(5p) **a)** Arătați că funcția F este o primitivă a funcției f.

(5p) **b)** Calculați $\int_1^2 (f(x))\, dx$.

(5p) **c)** Calculați $\int \left(f(x) - \frac{1}{x}\right) e^x dx$.

Barem de rezolvare -Teza semestrul I-Matematică *tehnologic*
An scolar 2019-2020 -Clasa a XII-a
***Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.*SUBIECTUL I (30 p)**

Subiectul I (30p)		
1	$\hat{2}\cdot(\hat{1}+\hat{4})+\hat{3}=\hat{2}\cdot\hat{5}+\hat{3}$	**2p**
	rezultat final $\hat{1}$	**3p**
2	$2*(-7)$ = 2+(-7)+5	**2p**
	rezultat final 3	**3p**
3	$x\circ y=xy+x+y$ și $y\circ x=yx+y+x$	**2p**
	$x+y=y+x$ și $x\cdot y=y\cdot x$, $(\forall)x,y\in\mathbb{R}$	**2p**
	deci $x\circ y=y\circ x$, $(\forall)x,y\in\mathbb{R}$	**1p**
4	$\int\frac{1}{x^2-9}dx=\frac{1}{2\cdot 3}ln\left\|\frac{x-3}{x+3}\right\|+C$	**3p**
	Cum $x>3$ rezultă $\frac{1}{6}ln\frac{x-3}{x+3}+C$	**2p**
5	$F(x)=\frac{x^3}{3}-x+C, x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$F(2)=0\Rightarrow C=-\frac{2}{3}$	**2p**
	$F(x)=\frac{x^3}{3}-x-\frac{2}{3},\ x\in\mathbb{R}$	**1p**
6	g primitiva lui f dacă g derivabilă	**1p**
	și $g'(x)=f(x),(\forall)x\in\mathbb{R}$	**1p**
	$g'(x)=-x+2=f(x),(\forall)x\in\mathbb{R}$	**3p**

Subiectul II (30p)		
1a	$x\circ y=x(y+4)+4(y+4)-4$	**2p**
	$=xy+4x+4y+16-4=xy+4x+4y+12$, $(\forall)x,y\in\mathbb{R}$	**3p**
1b	$e\in\mathbb{R}$ este element neutru al legii dacă $x\circ e=e\circ x=x$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$	**2p**
	legea este comutativă, deci $x\circ e=e\circ x$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$	**1p**
	de unde rezultă că e=-3	**2p**
1c	$x\circ x=(x+4)^2-4$ =12	**2p**
	$(x+4)^2=16$	**1p**

	soluțiile sunt $x_1 = 0$ si $x_2 = -8$	2p
2a	legea este asociativă dacă $(x * y) * z = x * (y * z)$, $(\forall)x, y, z \in \mathbb{R}$	1p
	$(x * y) * z = (x + y + 3) * z = x + y + z + 6$	2p
	$x * (y * z) = x * (y + z + 3) = x + y + z + 6$	2p
2b	$x^2 * (x + 1) = x^2 + x + 4$	2p
	$x^2 + x + 4 = 6 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$	1p
	cu soluțiile $x_1 = -2$ si $x_2 = 1$	2p
2c	$1 * 2 * 3 * \ldots * 10 = 1 + 2 + 3 + \cdots + 10 + 3 \cdot 9$	3p
	$= \frac{10 \cdot 11}{2} + 27 = 82$	2p

Subiectul III (30p)		
1a	f admite primitive pe $\mathbb{R}$ dacă f este continuă pe $\mathbb{R}$ f este continuă pe R \{1}, punct în care se va studia continuitatea	1p
	$l_s(1) = 3$; $l_d(1) = 3$; $f(1) = 3$, deci f este continuă în 1	3p
	$\Rightarrow f$ continuă pe $\mathbb{R}$, deci f admite primitive pe $\mathbb{R}$	1p
1b	$F(x) = x^2 + x + C$, pentru $x \geq 1$	2p
	$F(2) = 7 \Rightarrow C = 1$	2p
	$F(x) = x^2 + x + 1$, pentru $x \geq 1$	1p
1c	$\int_0^2 (f(x))dx = \int_0^1 (x^2 + x + 1)dx + \int_1^2 (2x + 1)dx$	2p
	$= \frac{x^3}{3}\Big\|_0^1 + \frac{x^2}{2}\Big\|_0^1 + x\|_0^1 + x^2\|_1^2 + x\|_1^2$	2p
	$= \frac{35}{6}$	1p
2a	F primitiva lui f dacă F derivabilă și $F'(x) = f(x), (\forall)x \in (0; \infty)$	1p
	$F'(x) = (x^3)' + (x)' + (lnx)'$	1p
	$= 3x^2 + 1 + \frac{1}{x}, (\forall)x \in (0; \infty)$	2p
	$= f(x), (\forall)x \in (0; \infty)$, deci F este primitiva lui f pe $(0; \infty)$	1p
2b	$\int_1^2 (f(x))dx = \int_1^2 \left(3x^2 + 1 + \frac{1}{x}\right) dx$	2p
	$= x^3\|_1^2 + x\|_1^2 + ln\|x\|\Big\|_1^2$	2p
	$= 8 + ln2$	1p
2c	$\int \left(f(x) - \frac{1}{x}\right) e^x dx = \int (3x^2 + 1)e^x dx$	2p
	Se calculează prin părți și se obține $(3x^2 - 6x + 7)e^x + C$	3p