Examenul de bacalaureat naţional 2019
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că suma elementelor mulțimii $A=\{n\in\mathbb{N} \mid n-1\le 4\}$ este egală cu 15.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că vârful parabolei asociate funcției f are ordonata egală cu 2.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+3}=\sqrt{9-x}$.

5p **4.** Determinați numărul submulțimilor cu cel puțin 8 elemente ale unei mulțimi cu exact 10 elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,1)$, $B(-1,3)$ și $C(8,10)$. Determinaţi lungimea segmentului CD, unde punctul D este mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Arătați că $1+\cos\pi+\cos 2\pi+\cos 3\pi+\ldots+\cos 2019\pi=0$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}a+1&0&0\\1&a&1\\0&0&a+1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(1)\right)=4$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)A(b)=ab\,I_3+(a+b+1)A(0)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $A(0)A(1)A(2)\ldots A(2019)=n!A(0)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-mX^2+2X+3-m$, unde m este număr real.

5p **a)** Determinați numărul real m, știind că $f(1)=0$.

5p **b)** Pentru $m=3$, determinați rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinați numărul real m pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=(x_1+x_2+x_3)^3-12$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\dfrac{2}{x+1}-\ln\dfrac{x}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x-1}{x(x+1)^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Se consideră funcțiile $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ și $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $h(x)=\ln\dfrac{x}{x+1}$. Demonstraţi că graficele funcţiilor g şi h **nu** au niciun punct comun.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+4}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\,dx=\frac{13}{3}$.

5p **b)** Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x\,f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=-1$ și $x=1$, are aria egală cu $\dfrac{10\sqrt{5}-16}{3}$.

5p **c)** Calculați $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\int_0^x t^3 f(t)\,dt$.

Examenul de bacalaureat naţional 2019
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$n \le 5 \Rightarrow A = \{0,1,2,3,4,5\}$	**3p**
	Suma elementelor mulțimii A este $0+1+2+3+4+5=15$	**2p**
2.	$\Delta = 4-4m$	**2p**
	$\frac{4m-4}{4}=2$, de unde obținem $m=3$	**3p**
3.	$x+3=9-x \Rightarrow 2x=6$	**3p**
	$x=3$, care convine	**2p**
4.	O mulțime cu 10 elemente are $C_{10}^8+C_{10}^9+C_{10}^{10}$ submulțimi cu cel puțin 8 elemente	**3p**
	$C_{10}^8+C_{10}^9+C_{10}^{10}=45+10+1=56$	**2p**
5.	$D(2,2)$	**2p**
	$CD=10$	**3p**
6.	$\cos 2k\pi = 1$ și $\cos(2k+1)\pi=-1$, unde $k \in \mathbb{Z}$	**2p**
	$1+\cos\pi+\cos 2\pi+\cos 3\pi+\ldots+\cos 2019\pi = 1+(-1)+1+(-1)+1+\ldots+(-1)+1+(-1)=0$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&1\\0&0&2\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}2&0&0\\1&1&1\\0&0&2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=4+0+0-0-0-0=4$	**3p**
b)	$A(a)A(b)=\begin{pmatrix}ab+a+b+1&0&0\\a+b+1&ab&a+b+1\\0&0&ab+a+b+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ab&0&0\\0&ab&0\\0&0&ab\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a+b+1&0&0\\a+b+1&0&a+b+1\\0&0&a+b+1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=ab\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+(a+b+1)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}=abI_3+(a+b+1)A(0)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$A(0)A(a)=(a+1)A(0)$, pentru orice număr real a	**2p**
	$A(0)A(1)A(2)\ldots A(2019)=2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2020A(0)$, de unde obținem $n=2020$	**3p**
2.a)	$f(1)=6-2m$	**3p**
	$6-2m=0 \Rightarrow m=3$	**2p**
b)	$f=X^3-3X^2+2X=X\left(X^2-3X+2\right)$	**2p**
	Rădăcinile sunt $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$	**3p**

c)	$x_1+x_2+x_3=m$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=2$, deci $x_1^3+x_2^3+x_3^3=m^3-3m-9$	**3p**
	$m^3-3m-9=m^3-12$, de unde obținem $m=1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=-2\left(-\dfrac{1}{(x+1)^2}\right)-\dfrac{x+1}{x}\cdot\dfrac{x+1-x}{(x+1)^2}=$	**2p**
	$=\dfrac{2}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{2x-(x+1)}{x(x+1)^2}=\dfrac{x-1}{x(x+1)^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{x+1}-\ln\dfrac{x}{x+1}\right)=1-0-0=1$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(0,1]$, deci f este descrescătoare pe $(0,1]$ și $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)$, deci f este crescătoare pe $[1,+\infty)\Rightarrow f(x)\ge f(1)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p**
	$f(1)=\ln 2>0$, deci $f(x)>0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$ și, cum $g(x)=h(x)\Leftrightarrow f(x)=0$, ecuația $g(x)=h(x)$ nu are soluție în $(0,+\infty)$, deci graficele funcțiilor g și h nu au niciun punct comun	**2p**
2.a)	$\int_0^1 f^2(x)\,dx=\int_0^1\left(x^2+4\right)dx=\left(\dfrac{x^3}{3}+4x\right)\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{3}+4-0=\dfrac{13}{3}$	**2p**
b)	$g(x)=x\sqrt{x^2+4}\Rightarrow \mathcal{A}=\int_{-1}^1\|g(x)\|\,dx=-\int_{-1}^0 x\sqrt{x^2+4}\,dx+\int_0^1 x\sqrt{x^2+4}\,dx=$	**2p**
	$=-\dfrac{1}{3}\left(x^2+4\right)^{\frac{3}{2}}\Big\|_{-1}^0+\dfrac{1}{3}\left(x^2+4\right)^{\frac{3}{2}}\Big\|_0^1=-\dfrac{1}{3}\left(8-5\sqrt{5}\right)+\dfrac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-8\right)=\dfrac{10\sqrt{5}-16}{3}$	**3p**
c)	Din teorema lui l'Hospital, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^4}\int_0^x t^3 f(t)\,dt=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3 f(x)}{4x^3}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{4}=\dfrac{1}{2}$	**2p**