

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA PE SECTOR ; BUCUREȘTI-14.02.2009

CLASA a V-a

1. Determinați cel mai mic număr natural de forma $\overline{2009a_1a_2\dots a_k2009}$ care are suma cifrelor 2009.

Daniela Chiteș

2. Cailor unei ferme li s-au pus potcoave noi. Potcoavele se prind de copitele cailor cu ajutorul unor "cuie" speciale numite caiele. Dacă în total s-au folosit 1284 caiele, câți cai au fost potcoviți?

(Precizare .O potcoavă este fixată prin cel puțin două cuie(caiele) la piciorul unui cal.)

Dilimoț-Niță Vasilica

3. Să se determine ultima cifră a numărului :

$$M = 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2008$$

Doina Stoica (Gazeta Matematică)

4. Să se determine suma tuturor resturilor împărțirilor la 10 ale numerelor naturale n , cu proprietatea $0 \leq n \leq 2009$.

Dorela Făiniși

Notă

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează între 1 și 7 puncte.

Timp de lucru efectiv : 2 ore

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**FAZA PE SECTOR ; BUCUREȘTI-14.02.2009****SOLUȚII ȘI BAREM DE CORECTARE****CLASA a V-a**

1. $2009 - 11 \cdot 2 = 1987$; $1987 = 220 \cdot 9 + 7$. Deci minimul va fi obținut pentru

$$a_1 = 7, a_2 = a_3 = \dots = a_{221} = 9.$$

2. Dacă n este numărul cailor, k numărul de caiele folosite, $1284 = n \cdot k \cdot 4 \Leftrightarrow n \cdot k = 321$; ($k > 1$)

deoarece pentru fixarea unei potcoave sunt necesare minim două caiele;

$321 = 3 \cdot 107$ este descompunerea în factori primi, rezultă $k = 3$ și $n = 107$, deoarece nu se pot accepta 107 caiele la o potcoavă.

3. Ultima cifră este 3.

4. $2010 : 10 = 201$; $0 + 1 + \dots + 9 = 45$, deci suma va fi egală cu: $201 \cdot 45 = 9045$.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**FAZA PE SECTOR****BUCUREȘTI-14.02.2009****CLASA a VI-a**

1. În jurul unei mese rotunde cu 36 de locuri se află 19 fete și 17 băieți. Să se arate că oricum s-ar așeza, cel puțin două fete se vor afla față în față (pe locuri diametral opuse).

Georgeta Alexandrescu, Niculaie Marin Goșoniu

2. Fie $a, b, c \in \mathbb{N}$, astfel încât $2 \cdot a + 3 \cdot b = 9 \cdot n + 24$ și $5 \cdot b - 6 \cdot c = 15 \cdot n + 2$. Să se determine a și c .

Dumitru Săvulescu (Gazeta Matematică)

3. Pe o dreaptă se consideră un punct fix A , un punct mobil P și mijlocul N al segmentului AP . Când punctul P se deplasează pe dreaptă și ajunge în poziția P' , punctul N se deplasează și ajunge în poziția N' . Ce relație există între lungimile segmentelor PP' și NN' ?

Viorel Chinan

4. În jurul punctului O se consideră unghiurile $\sphericalangle A_1OA_2, \sphericalangle A_2OA_3, \sphericalangle A_3OA_4, \dots, \sphericalangle A_{11}OA_{12}, \sphericalangle A_{12}OA_1$ ce au interioarele disjuncte și măsurile exprimate în grade prin numere naturale multipli consecutivi ai lui 4.

a) Aflați măsurile unghiurilor.

b) Există două dintre laturile unghiurilor care să fie semidrepte opuse?

c) Există două bisectoare ale unghiurilor care să aibă dreptele suport perpendiculare?

Nicolae Victor, Petre Simion

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează între 1 și 7 puncte.

Timp de lucru efectiv : 2 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

FAZA PE SECTOR

BUCUREȘTI-14.02.2009

SOLUȚII ȘI BAREM DE CORECTARE

CLASA a VI-a

1. Se aplică principiul cutiei.

2. Înmulțim prima relație cu 5, pe cea de-a doua cu 3 și le scădem. Obținem $5a + 9c = 57$. Din $9c \leq 57$ deducem $c \leq 6$. Din $5a = 57 - 9c$, deducem că $57 - 9c$ se divide cu 5. Obținem $c = 3$ și $a = 6$

3. Se consideră toate cele 6 așezări (permutări) ale punctelor și se obține: $NN' = \frac{1}{2}PP'$.

4.a) $8^\circ, 12^\circ, \dots, 52^\circ$

b) Da există. Perechea $((OA_6, (OA_{11})))$, deoarece

$$m(\sphericalangle A_6 OA_7) + \dots + m(\sphericalangle A_{10} OA_{11}) = 28^\circ + 32^\circ + 36^\circ + 40^\circ + 44^\circ = 180^\circ$$

c) Da există. Fie $(OE_1, (OE_2, \dots, (OE_{12}$ bisectoarele celor 12 unghiuri în ordinea scrisă. Atunci $OE_5 \perp OE_8$, deoarece

$$m(\sphericalangle E_5 OA_6) + m(\sphericalangle A_6 OA_7) + m(\sphericalangle A_7 OA_8) + m(\sphericalangle A_8 OE_8) = 12^\circ + 28^\circ + 32^\circ + 18^\circ = 90^\circ$$

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

FAZA PE SECTOR

BUCUREȘTI-14.02.2009

CLASA a VII-a

1.a) Să se demonstreze că $\frac{1}{n(n+8)} = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+8} \right)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Să se calculeze suma $S = \frac{1}{1 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 17} + \frac{1}{17 \cdot 25} + \dots + \frac{1}{41 \cdot 49}$

c) Determinați $x, y \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x^2 \cdot \sqrt{(y-1)^2} = 2009$

Consuela Voica

2. Să se demonstreze că numărul $\overline{A(A+1)}$ nu este pătrat perfect, oricare ar fi numărul natural A de forma: $A = 4 \cdot k + 2, k \in \mathbb{N}$.

Petre Simion

3. Să se arate că ecuația: $x^2 + 6y^2 = 2807$ nu are soluții numere întregi.

Costel Chiteș, Gabriel Vrînceanu

4. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic cu $m(\sphericalangle A) = 60^\circ$, iar E și F picioarele înălțimilor din B și C .

Notăm cu M mijlocul laturii $[BC]$ și cu H ortocentrul triunghiului.

a) Stabiliți $m(\sphericalangle BHC)$

b) Stabiliți natura triunghiului EFM

c) Știind că $\frac{AF}{FB} = \frac{5}{3}$, determinați $\frac{AE}{EC}$

Anca - Silvia Negulescu

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează între 1 și 7 puncte.

Timp de lucru efectiv: 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

FAZA PE SECTOR

BUCUREȘTI-14.02.2009

CLASA a VIII-a

1. Să se rezolve ecuația :

$$\left| \frac{6x}{3x+1} \right| + \left| \frac{3x+1}{6x} \right| = 2 - |3x-1|$$

Dilimoț-Niță Vasilica

2. Un triunghi are lungimile înălțimilor $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$. Aflați lungimile medianaelor.

Damian Marinescu (Gazeta Matematică)

3. Dacă $a \in \mathbb{R}_+^*$ și $a + \frac{1}{a} = 3$, să se determine valoarea expresiei :

$$E = \frac{1}{a^4} \cdot (a^8 + a^7 + a^6 + a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)$$

4. Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$ având proprietatea $AA' \leq \min(AB, BC)$.

Notăm cu O centrul dreptunghiului $ABCD$.

a) Să se demonstreze că paralelipipedul este cub dacă și numai dacă $C'O \perp AC$.

b) În cazul în care $C'O \perp AC$, determinați măsura unghiului planelor (AOC') și (ABC) .

Daniela Chiteș

Notă . Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează între 1 și 7 puncte.

Timp de lucru efectiv : 3 ore.