Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p	**1.** Determinați suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$, dacă $a_1=2$ și rația $r=2$.
5p	**2.** Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-10x+9$ cu axa Ox.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{x+1}-3\cdot 5^x=2$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr x din mulțimea $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, acesta să fie soluție a ecuației $x^2-4x+4=0$.
5p	**5.** Determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, știind că triunghiul ABC este echilateral și $AB=2$.
5p	**6.** Arătați că $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin^2(x+\pi)=1$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1+4a & -6a\\ 2a & 1-3a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det\left(A(1)\right)=2$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(a)A(b)=A(a+b+ab)$, pentru orice numere reale a și b.
5p	**c)** Determinați perechile de numere naturale m și n pentru care $A(m)A(n)=A(2)$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=2xy-2x-2y+3$.
5p	**a)** Arătați că $x\circ y=2(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**b)** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x\circ x\leq 9$.
5p	**c)** Calculați $1^n\circ 2^n\circ 3^n\circ\ldots\circ 2019^n$, pentru orice număr natural nenul n.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln x^e$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{x-e}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției f, în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu axa Ox.
5p	**c)** Demonstraţi că ecuația $e^x=x^e$ are exact o soluție în $(0,+\infty)$.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)(x+1)e^x$.
5p	**a)** Arătaţi că $\int_0^3\frac{f(x)}{e^x}dx=6$.
5p	**b)** Determinaţi aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=2$.
5p	**c)** Determinaţi numărul real a, $a>2$, ştiind că $\int_2^a\frac{2xe^x}{f(x)}dx=3\ln 2$.

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_2=4$, $a_3=6$	**2p**
	$a_1+a_2+a_3=2+4+6=12$	**3p**
2.	$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-10x+9=0$	**3p**
	Abscisele sunt $x=1$ și $x=9$	**2p**
3.	$5^x(5-3)=2 \Leftrightarrow 5^x\cdot 2=2 \Leftrightarrow 5^x=1$	**3p**
	$x=0$	**2p**
4.	Mulțimea A are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea A este un singur număr care verifică ecuația, deci este un caz favorabil	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{1}{10}$	**2p**
5.	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$, unde M este mijlocul laturii BC	**3p**
	$AM=\sqrt{3}$, deci lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ este egală cu $2\sqrt{3}$	**2p**
6.	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$, $\sin(x+\pi)=-\sin x$	**2p**
	$\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+\sin^2(x+\pi)=\cos^2 x+\sin^2 x=1$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}5 & -6\\ 2 & -2\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}5 & -6\\ 2 & -2\end{vmatrix}=5\cdot(-2)-2\cdot(-6)=$	**3p**
	$=-10+12=2$	**2p**
b)	$A(a)A(b)=\begin{pmatrix}1+4a & -6a\\ 2a & 1-3a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+4b & -6b\\ 2b & 1-3b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+4a+4b+4ab & -6b-6ab-6a\\ 2a+2ab+2b & 1-3a-3b-3ab\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1+4(a+b+ab) & -6(a+b+ab)\\ 2(a+b+ab) & 1-3(a+b+ab)\end{pmatrix}=A(a+b+ab)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$A(m+n+mn)=A(2) \Leftrightarrow m+n+mn=2$	**2p**
	Cum m și n sunt numere naturale, $(m+1)(n+1)=3 \Rightarrow m=2$, $n=0$ sau $m=0$, $n=2$	**3p**
2.a)	$x\circ y=2xy-2x-2y+2+1=$	**2p**
	$=2x(y-1)-2(y-1)+1=2(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$x\circ x=2(x-1)^2+1$, de unde obținem $(x-1)^2\le 4$	**2p**
	$x\in[-1,3]$	**3p**
c)	$1\circ x=1$, pentru orice număr real x	**2p**
	$1^n\circ 2^n\circ 3^n\circ\ldots\circ 2019^n=1\circ\left(2^n\circ 3^n\circ\ldots\circ 2019^n\right)=1$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=x'-(e\ln x)'=$	**2p**
	$=1-e\cdot\frac{1}{x}=\frac{x-e}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $(a,f(a))$ este paralelă cu axa $Ox \Leftrightarrow f'(a)=0$	**3p**
	$a-e=0 \Leftrightarrow a=e$	**2p**
c)	$f'(x)<0$, pentru orice $x\in(0,e)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(0,e)$ și $f'(x)>0$, pentru orice $x\in(e,+\infty)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(e,+\infty)$	**2p**
	$e^x=x^e \Leftrightarrow x=\ln x^e \Leftrightarrow f(x)=0$ și, cum f este continuă și $f(e)=0$, ecuația $e^x=x^e$ are exact o soluție în $(0,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^3 \frac{f(x)}{e^x}dx=\int_0^3 (x-1)(x+1)dx=\int_0^3\left(x^2-1\right)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\right\|_0^3=$	**3p**
	$=9-3=6$	**2p**
b)	$\mathcal{A}=\int_1^2 \left\|f(x)\right\| dx=\int_1^2\left(x^2-1\right)e^x dx=\left.\left(x^2-1\right)e^x\right\|_1^2-\int_1^2 2xe^x dx=$	**2p**
	$=3e^2-0-2\left.(x-1)e^x\right\|_1^2=3e^2-2e^2=e^2$	**3p**
c)	$\int_2^a \frac{2xe^x}{f(x)}dx=\int_2^a\frac{2x}{x^2-1}dx=\left.\ln\left(x^2-1\right)\right\|_2^a=\ln\frac{a^2-1}{3}$	**3p**
	$\ln\frac{a^2-1}{3}=3\ln 2 \Leftrightarrow a^2-25=0$ și, cum a este număr real, $a>2$, obținem $a=5$	**2p**