Universitatea din Craiova
Facultatea de Automatică, Calculatoare şi Electronică
Examen de admitere la licenţă - Sesiunea iulie 2019
Domeniul Calculatoare şi Tehnologia Informaţiei
Proba scrisă la matematică

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculaţi modulul numărului complex $z=\left[\left(\sqrt{7}-1\right)+i\left(\sqrt{7}+1\right)\right]^{2019}$.

5p **2.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\lg^2 x+\lg(x^3)+2=0$.

5p **3.** Determinaţi x din egalitatea $4+7+10+13+\cdots+x=714$.

5p **4.** Calculaţi suma $C_n^0+3C_n^1+9C_n^2+27C_n^3+\cdots+3^nC_n^n$, $n\in\mathbb{N}$.

5p **5.** În raport cu reperul cartezian ortonormat xOy din plan, se consideră punctele $A(1,3)$, $B(-1,1)$. Scrieţi ecuaţia mediatoarei segmentului $[AB]$.

5p **6.** Dacă în triunghiul ABC se cunosc lungimile laturilor $BC=4$, $AB=5$, $AC=3$, atunci calculaţi $\cos A$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie $\alpha\in\mathbb{R}$, matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 1\\ -1 & \alpha & 1\end{pmatrix}$ şi punctele $M(2,0)$, $N(0,3)$, $P(-1,\alpha)$.

5p **a)** Pentru $\alpha=2$, arătaţi că A este inversabilă.

5p **b)** Aflaţi α astfel încât punctele M, N, P să fie coliniare.

5p **c)** Pentru $\alpha=0$, rezolvaţi ecuaţia $AX=\begin{pmatrix}-1\\ 3\\ -4\end{pmatrix}$.

2. Fie polinomul $f=X^4-X^3+X^2-X+1$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4.

5p **a)** Calculaţi suma $S=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$.

5p **b)** Determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul $g=X^2-X$.

5p **c)** Arătaţi că polinomul f are cel mult două rădăcini reale.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2+1\right)e^{-x^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Calculaţi $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi intervalele de monotonie şi punctele de extrem pentru funcţia f.

5p **c)** Arătaţi că $0<\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx\le\frac{\pi}{4}$.

2. Fie $a>0$ şi funcţiile f, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-x^2+ax-a$, $g(x)=(x-1)^2$.

5p **a)** Aflaţi a astfel încât $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^3}{3}+x^2-2x+2$ să fie o primitivă a lui f.

5p **b)** Calculaţi $\displaystyle\int_2^3\frac{dx}{g(x)}$.

5p **c)** Fie funcţia $h:(2,\infty)\to\mathbb{R}$, $h(x)=\displaystyle\int_e^x\frac{f(t)}{g(t)}dt$. Arătaţi că h este strict crescătoare, oricare ar fi $a>0$.

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

Universitatea din Craiova
Facultatea de Automatică, Calculatoare şi Electronică
Examen de admitere la licenţă - Sesiunea iulie 2019
Domeniul Calculatoare şi Tehnologia Informaţiei

Proba scrisă la matematică

BAREM DE EVALUARE ŞI NOTARE

• **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
• **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
• **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $|z| = \left|\left(\sqrt{7}-1\right) + i\left(\sqrt{7}+1\right)\right|^{2019}$ **2p**
$\left|\left(\sqrt{7}-1\right) + i\left(\sqrt{7}+1\right)\right| = \sqrt{\left(\sqrt{7}-1\right)^2 + \left(\sqrt{7}+1\right)^2}$ **2p**
$|z| = 4^{2019}$ **1p**
2. Condiţie de existenţă: $x > 0$ **1p**
Substituţia $\lg x = t$ conduce la ecuaţia $t^2 + 3t + 2 = 0$ **1p**
Soluţiile ecuaţiei $t^2 + 3t + 2 = 0$ sunt $t_1 = -2$ şi $t_2 = -1$ **2p**
Soluţiile ecuaţiei iniţiale sunt $x_1 = 10^{-2}$ şi $x_2 = 10^{-1}$ **1p**
3. Progresia aritmetică are primul termen $a_1 = 4$ şi raţia $r = 3$ **2p**
Suma primilor n termeni este $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2} = \dfrac{(5+3n)\cdot n}{2} = 714$ **1p**
$n = 21$ **1p**
$x = a_{21} = 64$ **1p**
4. Suma este $(1+3)^n = 4^n$ **5p**
5. Mijlocul segmentului $[AB]$ este $M(0,2)$ **2p**
Panta dreptei AB este 1 .... **1p**
Panta mediatoarei segmentului este -1 .... **1p**
Ecuaţia mediatoarei segmentului $[AB]$ este $y = -x + 2$ **1p**
6. $\cos A = \dfrac{3}{5}$ **5p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.
a) Pentru $\alpha = 2$, determinantul matricei A este 5 .... **3p**
$\det A \neq 0$ implică A este matrice inversabilă **2p**
b) Punctele M, N, P sunt coliniare dacă şi numai dacă $\det A = 0$ **2p**
$\alpha = \dfrac{9}{2}$ **3p**
c) Pentru $\alpha = 0$, soluţia este $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ **5p**

2.

a) $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$, $S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 1$ **2p**

$S = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = S_1^2 - 2S_2 = -1$ **3p**

b) Câtul este $q = X^2 + 1$ **3p**

Restul este $r = 1$ **2p**

c) $S = -1 < 0$ implică faptul că nu toate rădăcinile lui f sunt numere reale **3p**

Concluzia **2p**

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.

a) $f'(x) = -2x^3e^{-x^2}$ **5p**

b) f este crescătoare pe $(-\infty, 0]$ şi descrescătoare pe $[0, +\infty)$ **3p**

$x = 0$ este singurul punct de extrem cu valoarea maximă $f(0) = 1$ **2p**

c) $e^{-x^2} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ implică $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \geq 0$ **1p**

Din continuitatea funcţiei e^{-x^2} rezultă $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx > 0$ **1p**

$f(x) \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ implică $e^{-x^2} \leq \dfrac{1}{x^2+1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ **2p**

$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leq \int_0^1 \dfrac{1}{x^2+1}\,dx \leq \dfrac{\pi}{4}$ **1p**

2.

a) $a = 2$ **5p**

b) $\int_2^3 \dfrac{1}{g(x)}\,dx = \int_2^3 \dfrac{(x-1)'}{(x-1)^2}\,dx$ **2p**

$\int_2^3 \dfrac{1}{g(x)}\,dx = -\dfrac{1}{x-1}\Big|_2^3$ **2p**

$\int_2^3 \dfrac{dx}{g(x)} = \dfrac{1}{2}$ **1p**

c) $h'(x) = \dfrac{x^2+a}{x-1}$ **3p**

Întrucât oricare ar fi $a > 0$, $h'(x) > 0$ pentru orice $x > 2$, rezultă concluzia **2p**