UNIVERSITATEA DE VEST DIN TIMIŞOARA

FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Subiectul de Matematică pentru
Concursul de admitere la Facultatea de Matematică şi Informatică
Sesiunea Iulie 2019

Subiectul 1 *În mulţimea* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *se consideră matricele* $A(x) = \begin{pmatrix} 1+5x & -2x \\ 10x & -4x+1 \end{pmatrix}$, *unde* $x \in \mathbb{R}$.

i) Să se calculeze $\Big(A(1) - I_2\Big)^3$.

ii) Să se verifice că $A(x)A(y) = A(x+y+xy)$, *pentru orice* $x, y \in \mathbb{R}$.

iii) Să se calculeze produsul $A(1) \cdot A(2) \cdot \ldots \cdot A(2019)$.

Subiectul 2 *Se consideră polinomul* $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 - pX^2 + (p+1)X + 1$, *cu rădăcinile* $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

i) Determinaţi $p \in \mathbb{R}$ *pentru care* $x_1 + x_2 + x_3 = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3}$.

ii) Să se arate că, pentru orice $p \in \mathbb{R}$, *polinomul* f *nu este divizibil cu* $X^2 - 1$.

iii) Dacă $p = 1$ *calculaţi* $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ *şi arătaţi că* f *are o singură rădăcină reală.*

Subiectul 3 *Se consideră funcţia* $f : (-\infty, -3) \cup (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\Big(1 + \dfrac{3}{x}\Big)$.

i) Să se arate că funcţia f *este concavă pe* $(-\infty, -3)$.

ii) Să se determine limita şirului $(a_n)_{n \geq 1}$, *unde*

$$a_n = n\Big(f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n) - \ln\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\Big),\ n \geq 1.$$

iii) Să se arate că există $c \in (2,\, 3)$ *astfel încât* $(c-2)f'(c) + f(c) = \ln 2$.

Subiectul 4 *Se consideră funcţiile* $f, g : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x + \dfrac{1}{x}$, $g(x) = (x+1)\ln x - x + 1$.

i) Să se arate că funcţia g *este o primitivă a funcţiei* f.

ii) Calculaţi aria suprafeţei cuprinse între graficul funcţiei f *axa* Ox *şi dreptele de ecuaţie* $x = 1$ *şi* $x = e$.

iii) Calculaţi $\displaystyle\int_1^2 f(x)g(x)dx$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii şi se notează cu note cuprinse între 1 şi 10.

Timp de lucru: 3 ore.

UNIVERSITATEA DE VEST DIN TIMIŞOARA

FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Concurs de admitere la Facultatea de Matematică şi Informatică
Sesiunea Iulie 2019
Soluţii şi barem de corectare la Matematică

Subiectul 1 *În mulţimea* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *se consideră matricele* $A(x) = \begin{pmatrix} 1+5x & -2x \\ 10x & -4x+1 \end{pmatrix}$, *unde* $x \in \mathbb{R}$.

i) Să se calculeze $\left(A(1) - I_2\right)^3$.

ii) Să se verifice că $A(x)A(y) = A(x+y+xy)$, *pentru orice* $x, y \in \mathbb{R}$.

iii) Să se calculeze produsul $A(1) \cdot A(2) \cdot \ldots \cdot A(2019)$.

Barem: Start .... (**1p**)

i) Se obţine $\left(A(1) - I_2\right)^2 = \left(A(1) - I_2\right)^3 = A(1) - I_2$ .... (**2p**)

ii) Notând $B = A(1) - I_2$ avem că $A(x) = I_2 + xB$, cu $B^2 = B$ .... (**1p**)

$A(x)A(y) = (I_2 + xB)(I_2 + yB) = I_2 + xB + yB + xyB^2 = I_2 + (x+y+xy)B = A(x+y+xy)$ .. (**2p**)

iii) Conform punctului anterior $A(x)A(y) = A\big((x+1)(y+1) - 1\big)$ .... (**1p**)

Inductiv $A(x_1)A(x_2)\ldots A(x_n) = A\big((x_1+1)(x_2+2)\ldots(x_n+1)-1\big)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ .... (**2p**)

În particular $A(1)A(2)\ldots A(2019) = A(2020! - 1)$ .... (**1p**)

Subiectul 2 *Se consideră polinomul* $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 - pX^2 + (p+1)X + 1$, *cu rădăcinile* $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

i) Determinaţi $p \in \mathbb{R}$ *pentru care* $x_1 + x_2 + x_3 = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3}$.

ii) Să se arate că, pentru orice $p \in \mathbb{R}$, *polinomul* f *nu este divizibil cu* $X^2 - 1$.

iii) Dacă $p = 1$ *calculaţi* $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ *şi arătaţi că* f *are o singură rădăcină reală.*

Barem: Start .... (**1p**)

i) Conform relaţiilor lui Viéte $x_1 + x_2 + x_3 = p$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = p+1$, iar $x_1x_2x_3 = -1$ .... (**1p**)

Deoarece $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} = \dfrac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}{x_1x_2x_3} = -p - 1$ .... (**1p**)

se obţine că egalitatea este adevărată dacă şi numai dacă $p = -p - 1$, sau echivalent, $p = -\dfrac{1}{2}$ ..... (**1p**)

ii) Deoarece rădăcinile polinomului $X^2 - 1$ sunt 1 şi -1, rezultă că $X^2 - 1 \big| f$ dacă şi numai dacă $f(1) = f(-1) = 0$ .... (**1p**)

Dar $f(1) = 3 \neq 0$ şi deci $X^2 - 1$ nu divide polinomul f .... (**1p**)

iii) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = -3$ .... (**1p**)

Cum grad $f = 3$ (impar) rezultă că cel puţin o rădăcină este reală .... (**1p**)

Presupunând, prin reducere la absurd, că toate rădăcinile lui f sunt reale ar trebui să avem $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 0$ ceea ce contrazice calculul de mai sus .... (**1p**)

Dacă $x_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ este o rădăcină complexă dar nereală, cum $f \in \mathbb{R}[X]$, avem că $x_2 := \overline{x_1} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ este de asemenea rădăcină .... (**1p**)

Subiectul 3 *Se consideră funcţia* $f : (-\infty,\ -3) \cup (0,\ \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{3}{x}\right)$.

i) Să se arate că funcţia f *este concavă pe* $(-\infty,\ -3)$.

ii) Să se determine limita şirului $(a_n)_{n\geq 1}$, *unde*

$$a_n = n\Big(f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n) - \ln\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\Big),\ n \geq 1.$$

iii) Să se arate că există $c \in (2,\ 3)$ *astfel încât* $(c-2)f'(c) + f(c) = \ln 2$.

Barem: Start .... **(1p)**

i) Avem $f'(x) = \dfrac{1}{x+3} - \dfrac{1}{x}$, iar $f''(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x+3)^2} = \dfrac{6x+9}{x^2(x+3)^2}$, $x \in (-\infty,\ -3) \cup (0,\ \infty)$ .....**(1p)**

Deoarece $6x+9 < 0$ pentru orice $x \in (-\infty,\ -3)$, rezultă că $f''(x) < 0$, pentru orice $x < -3$, ceea ce arată că funcţia f este concavă pe intervalul $(-\infty,\ -3)$ ....**(1p)**

ii) Avem $f(1)+f(2)+\ldots+f(n) = \sum\limits_{k=4}^{n+3} \ln k - \sum\limits_{k=1}^{n} \ln k = \ln\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$, pentru orice $n \geq 1$ **(1p)**

Rezultă că $a_n = n\ln\dfrac{n+3}{n}$, $n \geq 1$ .... **(1p)**

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} 3\ln\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}} = 3\ln e = 3$ ....**(2p)**

iii) Funcţia $g : [2,\ 3] \to \mathbb{R}$, $g(x) = (x-2)f(x)$ este continuă pe $[2,\ 3]$ şi derivabilă pe $(2,\ 3)$ cu $f'(x) = (x-2)f'(x) + f(x)$, $x \in (2,\ 3)$ .... **(1p)**

Conform Teoremei lui Lagrange, există $c \in (2,\ 3)$ astfel încât $g(3) - g(2) = (3-2)g'(c)$, ceea ce este echivalent cu $\ln 2 = (c-2)f'(c) + f(c)$ .... **(2p)**

Subiectul 4 *Se consideră funcţiile* $f, g : [1,\ \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln x + \dfrac{1}{x},\ g(x) = (x+1)\ln x - x + 1$.

i) Să se arate că funcţia g *este o primitivă a funcţiei* f.

ii) Calculaţi aria suprafeţei cuprinse între graficul funcţiei f *axa* Ox *şi dreptele de ecuaţie* $x = 1$ *şi* $x = e$.

iii) Calculaţi $\displaystyle\int_1^2 f(x)g(x)dx$.

Barem: Start .... **(1p)**

i) Calculează g' şi observă că $g' = f$ pe $[1,\ \infty)$ ....**(2p)**

ii) Cum $f(x) \geq 0$, $x \geq 1$, rezultă că $\mathcal{A} = \displaystyle\int_1^e |f(x)|\,dx = \int_1^e f(x)\,dx = g(e) - g(1) = 2$ ....**(3p)**

iii) Avem că $f(x)g(x) = \left(\dfrac{1}{2}g^2\right)'(x)$, $x \geq 1$ .... **(2p)**

Cu formula Leibnitz-Newton se obţine că $\displaystyle\int_1^2 f(x)g(x)dx = \frac{1}{2}g^2(x)\Big|_1^2 = \frac{(3\ln 2 - 1)^2}{2}$ .... **(2p)**

Notă: Orice altă variantă de rezolvare corectă se punctează corespunzător.