Universitatea din Bucureşti **19.07.2019**
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul de admitere iulie 2019
Domeniul de licenţă - *Matematică*

I. Algebră. Considerăm polinomul $P(X) = (X+i)^{12} + (X-i)^{12}$.

(a) Calculaţi $P(0)$.
(b) Arătaţi că suma pătratelor rădăcinilor polinomului P este 132.
(c) Demonstraţi că numărul $\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{24})$ este o rădăcină a lui P.
(d) Demonstraţi că toate rădăcinile polinomului P sunt reale.
(e) Fie $Q = (X+i)^{12} + m(X-i)^{12}$, unde m este un număr complex. Demonstraţi că polinomul Q are (cel puţin) o rădăcină reală dacă şi numai dacă $|m| = 1$.

II. Analiză. Fie funcţia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

(a) Calculaţi $f(\frac{\pi}{2}) + f(\pi)$.
(b) Demonstraţi că f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi determinaţi asimptotele la graficul funcţiei f.
(c) Arătaţi că funcţia f are exact 3 puncte de extrem local în intervalul $(-2\pi, 2\pi)$.
(d) Calculaţi $\displaystyle\int_0^\pi x^3 f^2(x)dx$.
(e) Pentru orice număr natural $n \geq 1$, notăm $I_n = \displaystyle\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(x)dx$. Demonstraţi că şirul $(I_n)_n$ este strict monoton şi calculaţi $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$.

III. Geometrie. În planul de coordonate xOy fie punctele $A(1,1)$, $B(-1,3)$, $C(-a-1, a+5)$, $D(-a+1, a+3)$, unde $a \in \mathbb{R}$ este un parametru.

(a) Arătaţi că, pentru orice valoare a parametrului a, punctele C şi D se află pe dreapta de ecuaţie $x + y - 4 = 0$.
(b) Demonstraţi că pentru orice valoare a lui a, punctele A, B, C, D determină un paralelogram şi calculaţi aria acestuia.
(c) Fie $a = 0$. Considerăm B' simetricul lui B în raport cu C şi punctele M şi N astfel ca $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AN} = \lambda\ \overrightarrow{AB}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$. Determinaţi λ astfel încât vectorii $\overrightarrow{MN}$ şi $\overrightarrow{MB'}$ să fie coliniari.
(d) Fie $a = 0$. Notăm cu A_1 proiecţia lui A pe CD şi cu C_1 proiecţia lui C pe AB. Demonstraţi că dreptele A_1C_1, AC şi BD au un punct comun. Justificaţi dacă proprietatea rămâne valabilă pentru o valoare oarecare a lui a.
(e) Pentru ce valoare a lui a perimetrul paralelogramului $ABCD$ este minim? Justificaţi!

Subiectul de Informatică se găseşte pe verso.

IV. Informatică

Fie *v* un tablou unidimensional format din *n* numere naturale nenule ($n \geq 2$). Singura operație permisă asupra unui element al tabloului *v* constă în înlocuirea sa cu cel mai mare divizor comun dintre el și vecinul său din stânga sau vecinul său din dreapta, oricare dintre aceştia există. Scrieți un program care primeşte la intrare numărul *n* și cele *n* elemente ale tabloului *v*, iar apoi determină și afișează numărul minim de înlocuiri de tipul precizat, necesare pentru ca toate elementele tabloului să devină egale cu 1 sau mesajul "Imposibil" în cazul în care acest lucru nu se poate realiza.

Exemple:

Date de intrare	Date de ieșire	Observații
n = 5 *v* = (2, 6, 3, 1, 5)	4	Numărul minim de operații de înlocuire necesare este 4 și se poate obține, de exemplu, astfel: • înlocuim 3 cu cmmdc(3,1)=1, deci *v* = (2, 6, 1, 1, 5) • înlocuim 6 cu cmmdc(6,1)=1, deci *v* = (2, 1, 1, 1, 5) • înlocuim 2 cu cmmdc(2,1)=1, deci *v* = (1, 1, 1, 1, 5) • înlocuim 5 cu cmmdc(5,1)=1, deci *v* = (1, 1, 1, 1, 1)
n = 5 *v* = (3, 15, 5, 5, 10)	6	Numărul minim de operații de înlocuire necesare este 6 și se poate obține, de exemplu, astfel: • înlocuim 15 cu cmmdc(3,15)=3, deci *v* = (3, 3, 5, 5, 10) • înlocuim al doilea 3 cu cmmdc(3,5)=1, deci *v* = (3, 1, 5, 5, 10) • înlocuim primul 5 cu cmmdc(1,5)=1, deci *v* = (3, 1, 1, 5, 10) • înlocuim 5 cu cmmdc(1,5)=1, deci *v* = (3, 1, 1, 1, 10) • înlocuim 10 cu cmmdc(1,10)=1, deci *v* = (3, 1, 1, 1, 1) • înlocuim 3 cu cmmdc(3,1)=1, deci *v* = (1, 1, 1, 1, 1)

Note:

1. Programele vor fi scrise într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal, C sau C++). Pentru fiecare soluție se vor descrie informal detaliile algoritmului folosit și ale implementării sale sub formă de program: semnificația variabilelor, a structurilor de date, a structurilor repetitive și a instrucțiunilor condiționale.
2. Programele vor folosi doar instrucțiunile de bază ale limbajului de programare ales și funcții din biblioteci pentru citirea și scrierea datelor.
3. Citirea datelor se poate face de la tastatură sau dintr-un fişier text. Afişarea se va face doar pe monitor.
4. Se va considera că datele de intrare ale programelor sunt oricât de mari, dar fără a pune probleme de reprezentare în memorie cu ajutorul tipurilor de date standard.

Timp total de lucru: 3 ore

Universitatea din Bucureşti **19.07.2019**

Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul de admitere iulie 2019

Domeniul de licenţă - *Matematică*

Barem

I. Algebră. Oficiu .... 1 p

(a) Calculul lui $P(0) = 2$ .... 1 p

(b) $s_1 = 0, s_2 = -66$ (relaţiile lui Viète) .... 1 p

Calculul sumei pătratelor = 132 .... 1 p

(c) Utilizarea sau enunţarea formulei lui Moivre .... 0,5 p

Demonstraţia .... 1,5 p

(Punctajul se poate acorda integral dacă la d) sunt determinate efectiv toate rădăcinile, iar una dintre acestea este scrisă în forma $\text{ctg}(\frac{\pi}{24})$)

(d) Observaţia că numerele $\text{ctg}\frac{(2k+1)\pi}{24}$, $k = 0, 1, \ldots, 11$ sunt rădăcini ale lui P, sau scrierea ecuaţiei $P = 0$ în forma echivalentă $\left(\frac{X+i}{X-i}\right)^{12} = -1$, sau observaţia că, pentru o rădăcină x, avem $|x + i| = |x - i|$ .... 1 p

Demonstraţia faptului că polinomul are toate rădăcinile reale .... 1 p

(e) Implicaţia directă (dacă are o rădăcină reală, atunci $|m| = 1$) .... 1 p

Implicaţia inversă .... 1 p

II. Analiză. Oficiu .... 1 p

(a) Suma = $\frac{2}{\pi}$ .... 1 p

(b) Calculul derivatei în 0 ($f'(0) = 0$), folosind definiţia sau teorema Lagrange .... 0,5 p

Argumentarea faptului că f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ .... 0,5 p

Calculul limitelor funcţiei la $\pm\infty$ (egale cu 0) .... 0,5 p

Concluzia (dreapta de ecuaţie $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $\pm\infty$; nu există asimptote verticale sau oblice) .... 0,5 p

(c) Calculul derivatei $f'(x) = \begin{cases} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ .... 0,5 p

(Acest punctaj se acordă şi în cazul în care derivata a fost deja calculată explicit la b))

Studiul ecuaţiei $f'(x) = 0$ pe intervalul $(-2\pi, 2\pi)$ .... 1 p

Concluzia .... 0,5 p

(d) Enunţarea / utilizarea metodei de integrare prin părţi, sau a metodei de schimbare de variabilă .... 0,5 p

Calculul integralei ($= \frac{\pi^2}{4}$) .... 1,5 p

(e) Demonstrarea monotoniei .... 1 p

Calculul limitei (= 0) .... 1 p

III. Geometrie. Oficiu .... 1 p

(a) Verificarea condiţiei .... 1 p

(b) Verificarea proprietăţii .... 1 p

Aria paralelogramului este egală cu 4 .... 1 p

(c) Coordonatele punctelor $B'(-1,7)$, $M(0,3)$, $N(1-2\lambda, 1+2\lambda)$ .... 0,5 p

Scrierea şi prelucrarea unei condiţii de coliniaritate .... 1 p

Finalizarea $\lambda = \frac{1}{3}$ .... 0,5 p

(d) Coordonatele punctelor $A_1(2,2), C_1(-2,4)$ .... 0,5 p

Dreptele au un punct comun $(M(0,3))$ .... 1 p

Justificarea faptului că proprietatea este valabilă pentru orice a .... 0,5 p

(e) Formularea şi justificarea unei condiţii de minim (patrulaterul este dreptunghi / expresia a^2+2a+2 trebuie să aibă valoarea minimă) .... 1 p

Finalizarea $a=-1$ .... 1 p

IV. Informatică.

Oficiu .... 1 p

Citirea datelor de intrare şi afişarea rezultatului .... 0,5 p

Calculul cmmdc-ului a două numere naturale nenule .... 0,5 p

Rezolvarea cazului în care tabloul conţine cel puţin un element egal cu 1 .... 2 p

Rezolvarea cazului în care tabloul conţine cel puţin o pereche de elemente având cmmdc-ul egal cu 1 .... 2 p

Rezolvarea cazului în care tabloul conţine cel puţin o secvenţă formată din minim 3 elemente având cmmdc-ul egal cu 1 .... 2 p

Rezolvarea cazului în care problema nu are soluţie .... 1 p

Corectitudinea limbajului .... 0,5 p

Explicaţii .... 0,5 p