UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

CONCURS DE ADMITERE, 21 iulie 2019
Proba scrisă la MATEMATICĂ

NOTĂ IMPORTANTĂ:

1) Problemele de tip grilă din Partea A pot avea unul sau mai multe răspunsuri corecte, care trebuie indicate de candidat pe formularul special de pe foaia de concurs. Notarea subiectului de tip grilă se face conform sistemului de punctare parţială din regulament.

2) Pentru problemele din Partea B se cer rezolvări complete scrise pe foaia de concurs. Acestea sunt evaluate în detaliu conform baremului.

PARTEA A

1. (6 puncte) Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ notăm

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \cdots + \frac{1}{(3n-2) \cdot (3n+1)}.$$

Atunci valoarea lui S_{2019} este

A $\frac{2019}{6059}$; B $\frac{2018}{6059}$; C $\frac{2019}{6058}$; D $\frac{2018}{6058}$.

2. (6 puncte) Dacă $\log_x(x^2+2x) + \log_{x^2}(x+2) = 4$, atunci x poate fi

A 2; B $\sqrt{2}$; C 4; D $2\sqrt{2}$.

3. (6 puncte) Fie $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ matrice cu elemente reale. Dacă $AB = BA = O_2$ (matricea nulă din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$), atunci

A nu există astfel de B; B B este unic determinată;
C x, y, z sunt numere pare; D $\det B = 0$.

4. (6 puncte) În inelul $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ se consideră ecuaţia $\hat{3}(x + \hat{2}) = \hat{9}$. Atunci

A ecuaţia are exact 4 soluţii; B toate soluţiile ecuaţiei sunt inversabile în $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$;
C ecuaţia are exact 3 soluţii; D ecuaţia nu are soluţii.

5. (6 puncte) Fie $\ell = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{\sin^3 x}$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

A ℓ este număr raţional. B Limita ℓ nu există. C $\ell = 1/3$. D $\ell = \infty$.

6. (6 puncte) Fie a, $b \in \mathbb{R}$ parametri, fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin

$$f(x) = \begin{cases} ae^x + b + e^{-x}, & \text{dacă } x \leq 0 \\ x^2, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

şi fie $x_0 = 0$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

A Există o infinitate de perechi (a, b) pentru care f este continuă în punctul x_0.
B f este derivabilă în punctul $x_0 \Leftrightarrow (a = 1$ şi $b = -2)$.
C f este continuă în punctul $x_0 \Leftrightarrow a + b = -1$.
D f este derivabilă în punctul $x_0 \Leftrightarrow (a = -2$ şi $b = 1)$.

7. (6 puncte) Fie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin $f(x) = (x^2 - 4x + 6)e^x$. Atunci

$\boxed{\text{A}}$ funcţia f este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ şi crescătoare pe $(0, +\infty)$;
$\boxed{\text{B}}$ 0 este punct de inflexiune pentru funcţia f ;
$\boxed{\text{C}}$ funcţia f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$;
$\boxed{\text{D}}$ funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.

8. (6 puncte) Valoarea integralei $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1 + \sin x}$ este

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{\pi}{2}$; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{1}{2}$; $\boxed{\text{C}}$ π ; $\boxed{\text{D}}$ 1.

9. (6 puncte) În rombul $ABCD$ avem $AB = 12$ şi $m(\widehat{C}) = 60°$. Atunci suma

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$$

este egală cu

$\boxed{\text{A}}$ 72; $\boxed{\text{B}}$ $72\sqrt{3}$; $\boxed{\text{C}}$ $144\sqrt{3}$; $\boxed{\text{D}}$ $72(1 + \sqrt{3})$.

10. (6 puncte) În triunghiul ABC avem $BC = a$, $m(\widehat{A}) = 30°$ şi $m(\widehat{B}) = 105°$. Atunci aria triunghiului ABC este egală cu

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{a^2(\sqrt{3} - 1)}{4}$; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{a^2(1 + \sqrt{3})}{4}$; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{a^2(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{4}$; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

PARTEA B

1. (10 puncte) Să se calculeze următoarele limite:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n^2 + k^2}}$; (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n^2 + k}}$.

2. (10 puncte) În sistemul cartezian xOy se dau punctele $A(2, -1)$, $B(4, 3)$ şi dreapta $d : x - 2y - 1 = 0$.

(a) Să se demonstreze că dreapta d trece prin mijlocul segmentului $[AB]$.

(b) Să se determine punctele C pentru care aria triunghiului ABC este egală cu 3 şi una dintre medianele triunghiului ABC este pe dreapta d.

3. (10 puncte) Fie mulţimea de matrice

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z_2} & \overline{z_1} \end{pmatrix} \middle| z_1, z_2 \in \mathbb{C} \right\} \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),$$

unde prin $\overline{z}$ se notează conjugatul unui număr complex z.

(a) Să se arate că G este un subgrup al grupului $(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}), +)$.

(b) Să se construiască un morfism injectiv de grupuri între grupurile $(\mathbb{C}, +)$ şi $(G, +)$.

NOTĂ:
Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Răspunsuri şi soluţii

PARTEA A

Răspunsuri la probleme:

1. $\boxed{\text{C}}$;   **2.** $\boxed{\text{A}}$;   **3.** $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{D}}$;   **4.** $\boxed{\text{C}}$;   **5.** $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{C}}$;

6. $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$;   **7.** $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{D}}$;   **8.** $\boxed{\text{D}}$;   **9.** $\boxed{\text{A}}$;   **10.** $\boxed{\text{B}}$.

Soluţii la probleme:

1. Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ avem egalitatea $\frac{1}{k(k+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3}\right)$, de unde rezultă că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem

$$3S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} = 1 - \frac{1}{3n+1},$$

adică $S_n = \frac{n}{3n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Astfel, $S_{2019} = \frac{2019}{6058}$.

2. Condiţiile de existenţă a logaritmilor conduc la $x \in (0,1) \cup (1,\infty)$. În aceste condiţii, ecuaţia este echivalentă cu

$$\frac{1}{2}\log_x(x+2) + 1 + \log_x(x+2) = 4,$$

de unde rezultă că $\log_x(x+2) = 2$, adică $x^2 = x + 2$. În concluzie, $x = 2$ este singura soluţie.

3. Din ecuaţiile matriceale $AB = BA = O_2$ obţinem

$$\begin{pmatrix} 4-2y & 4x-2z \\ -2+y & -2x+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2x & -2+x \\ 4y-2z & -2y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rezolvând sistemele de ecuaţii obţinute ajungem la concluzia că singura soluţie este $x = 2$, $y = 2$ şi $z = 4$, deci $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Ecuaţia se scrie echivalent: $\hat{3}(x + \hat{2}) = \hat{9} \Leftrightarrow \hat{3}x + \hat{6} = \hat{9} \Leftrightarrow \hat{3}x - \hat{3} = \hat{0} \Leftrightarrow \hat{3}(x - \hat{1}) = \hat{0}$. Ultima egalitate are loc dacă şi numai dacă $x - \hat{1} \in \{\hat{0}, \hat{4}, \hat{8}\}$, deci mulţimea soluţiilor este $M = \{\hat{1}, \hat{5}, \hat{9}\}$. Dintre acestea, soluţia $\hat{9}$ nu este inversabilă în inelul $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$.

5. Aplicând regula lui l'Hôpital, găsim

$$\ell = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{3\sin^2 x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{3\sin^2 x \cos^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3\cos^3 x} = \frac{1}{3}.$$

6. Avem $\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x) = a + b + 1 = f(0)$ şi $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = 0$. Drept urmare, f este continuă în $x_0 = 0$ dacă şi numai dacă $a + b = -1$, deci există o infinitate de perechi (a, b) pentru care f este continuă în x_0. De asemenea, f este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, iar

$$f'(x) = ae^x - e^{-x} \quad \text{pentru orice } x < 0,$$

$$f'(x) = 2x \quad \text{pentru orice } x > 0.$$

Se constată imediat că $\lim\limits_{x\nearrow 0} f'(x) = a - 1$ şi $\lim\limits_{x\searrow 0} f'(x) = 0$. Presupunând că $a + b = -1$ (adică f este continuă în 0), în baza unei consecinţe a teoremei de medie a lui Lagrange rezultă că

$f'_s(0) = a - 1$ şi $f'_d(0) = 0$. Drept urmare, f este derivabilă în $x_0 = 0$ dacă şi numai dacă $a + b = -1$ şi $a - 1 = 0$, adică dacă şi numai dacă $a = 1$ şi $b = -2$.

7. Avem că $f'(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x > 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, iar $f''(x) = x^2 e^x \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

8. Cu schimbarea de variabilă $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, obţinem

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1 + \sin x} = \int_0^1 \frac{1}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2} = -\frac{2}{1+t}\Big|_0^1 = 1.$$

9. În rombul $ABCD$ avem $m(\widehat{BAD}) = 60^\circ$ şi diagonalele sunt perpendiculare. Folosind definiţia podusului scalar şi notând cu O intersecţia diagonalelor, obţinem că

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = AD \cdot AB \cdot \cos(\widehat{BAD}) + AC \cdot BD \cdot \cos(\widehat{AOD}) = 12 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} + 0 = 72.$$

10. Avem $m(\widehat{C}) = 180^\circ - 30^\circ - 105^\circ = 45^\circ$. Aplicăm teorema sinusului în triunghiul ABC:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{c}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Leftrightarrow c = a\sqrt{2}.$$

Aria triunghiului ABC este

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{a \cdot c \cdot \sin B}{2} = \frac{1}{2}a^2\sqrt{2} \cdot \sin(60^\circ + 45^\circ) = \frac{1}{2}a^2\sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{a^2(1+\sqrt{3})}{4}.$$

PARTEA B

Soluţii la probleme şi barem:

1. (a) Fie $a_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{\sqrt{n^2+k^2}}$.

(**3 puncte**) Avem

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k/n}{\sqrt{1+(k/n)^2}} = \sigma(f, \Delta_n, \xi_n),$$

unde $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ este funcţia definită prin $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, Δ_n este diviziunea intervalului $[0,1]$ definită prin $\Delta_n = (0,\, 1/n,\, 2/n,\, \ldots,\, 1)$, iar $\xi_n = (1/n,\, 2/n,\, \ldots,\, 1) \in P(\Delta_n)$.

Observaţie. În caz că nu se specifică funcţia, diviziunea şi sistemul de puncte intermediare, se acordă 2 puncte din cele 3 puncte.

(**1 punct**) Întrucât $\|\Delta_n\| = 1/n \to 0$ când $n \to \infty$, rezultă că $\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Observaţie. În caz că nu se precizează $\|\Delta_n\| = 1/n \to 0$ când $n \to \infty$, nu se acordă acest punct.

(**3 puncte**) Prin urmare, $\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{1+x^2}\,\Big|_0^1 = \sqrt{2}-1$.

(b) Fie $b_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{\sqrt{n^2+k}}$. Avem

$$(\mathbf{1\ punct}) \qquad b_n \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{n\sqrt{n^2+1}}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2n\sqrt{n^2+1}}$$

şi analog

$$(\mathbf{1\ punct}) \qquad b_n \ge \frac{n(n+1)}{2n\sqrt{n^2+n}}\,.$$

(**1 punct**) Cum $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n(n+1)}{2n\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n(n+1)}{2n\sqrt{n^2+n}} = \dfrac{1}{2}$, în baza criteriului cleştelui rezultă că $\lim_{n\to\infty} b_n = 1/2$.

2. (a) (**1 punct**) Mijlocul segmentului $[AB]$ este punctul $M(3,1)$.
(**1 punct**) Coordonatele punctului M satisfac ecuaţia dreptei d: $3-2-1=0$.

(b) (**2 puncte**) Deoarece dreapta d conţine o mediană a triunghiului ABC şi coordonatele punctelelor A şi B nu satisfac ecuaţia dreptei d (sau deoarece d trece prin mijlocul segmentului $[AB]$), obţinem că punctul C se află pe dreapta d.
(**2 puncte**) Fie coordonatele punctului $C(c_1, c_2)$. Atunci avem $c_1 - 2c_2 - 1 = 0 \Leftrightarrow c_1 = 2c_2 + 1$.
(**2 puncte**) Aria triunghiului ABC este $\frac{1}{2}|\Delta| = 3$, unde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2c_2+1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

(**1 punct**) De aici obţinem $|-6c_2+6| = 6 \Leftrightarrow |-c_2+1| = 1$, adică $c_2 = 0$ sau $c_2 = 2$.
(**1 punct**) Prin urmare, coordonatele lui C pot fi $C(1,0)$ sau $C(5,2)$.

3. (a) (1 punct) Avem $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in G$, deci $G \neq \emptyset$.

Fie $A = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z_2} & \overline{z_1} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} z_3 & z_4 \\ -\overline{z_4} & \overline{z_3} \end{pmatrix} \in G$. Avem:

$$\textbf{(3 puncte)} \quad A + B = \begin{pmatrix} z_1 + z_3 & z_2 + z_4 \\ -\overline{z_2} - \overline{z_4} & \overline{z_1} + \overline{z_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 + z_3 & z_2 + z_4 \\ -\overline{z_2 + z_4} & \overline{z_1 + z_3} \end{pmatrix} \in G,$$

$$\textbf{(3 puncte)} \quad -A = \begin{pmatrix} -z_1 & -z_2 \\ \overline{z_2} & -\overline{z_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z_1 & -z_2 \\ -\overline{(-z_2)} & \overline{-z_1} \end{pmatrix} \in G.$$

Deci G este un subgrup al grupului $(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}), +)$.

Observaţie. Alternativ, mulţimea G este un subgrup al grupului $(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}), +) \Leftrightarrow [G \neq \emptyset$, $A - B \in G$ pentru orice $A, B \in G] \Leftrightarrow [G$ este parte stabilă a lui $(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}), +)$ şi $(G, +)$ este grup$]$.

(b) (1 punct) Fie funcţia $f : \mathbb{C} \to G$ definită prin $f(z) = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \overline{z} \end{pmatrix}$ pentru orice $z \in \mathbb{C}$. Se observă că $\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \overline{z} \end{pmatrix} \in G$ pentru orice $z \in \mathbb{C}$, deci f este bine definită.

(1 punct) Verificarea injectivităţii lui f.

(1 punct) Pentru orice $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ avem:

$$f(z_1 + z_2) = \begin{pmatrix} z_1 + z_2 & 0 \\ 0 & \overline{z_1 + z_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 + z_2 & 0 \\ 0 & \overline{z_1} + \overline{z_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & \overline{z_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_2 & 0 \\ 0 & \overline{z_2} \end{pmatrix} = f(z_1) + f(z_2).$$

Deci f este morfism de grupuri între grupurile $(\mathbb{C}, +)$ şi $(G, +)$.

Observaţie. Există şi alte morfisme injective de grupuri între grupurile $(\mathbb{C}, +)$ şi $(G, +)$, care pot fi definite, de exemplu, prin $f(z) = \begin{pmatrix} 0 & z \\ -\overline{z} & 0 \end{pmatrix}$ sau $f(z) = \begin{pmatrix} z & z \\ -\overline{z} & \overline{z} \end{pmatrix}$.