CONCURSUL NAȚIONAL PENTRU OCUPAREA POSTURILOR /CATEDRELOR DECLARATE VACANTE/REZERVATE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR

17 iulie 2019

Probă scrisă
MATEMATICĂ

Varianta 3

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 4 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1. Se consideră $(a_n)_{n\ge1}$ o progresie aritmetică de numere reale, cu termenul $a_4 = 3\sqrt{2}$.

5p **a)** Arătați că, dacă rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n\ge1}$ este egală cu $\sqrt{2}-1$, atunci $a_1 = 3$.

5p **b)** Determinați rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n\ge1}$, știind că $a_1 + a_2 + \ldots + a_9 = 36\sqrt{2}$.

5p **c)** Demonstrați că progresia aritmetică $(a_n)_{n\ge1}$ conține cel mult un termen rațional.

2. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC în care $AB < AC$ și unghiul A are măsura de $60°$. Înălțimile BE, cu $E \in AC$ și CF, cu $F \in AB$, ale triunghiului ABC se intersectează în punctul H. Mediatoarea segmentului BH intersectează latura AB în P și mediatoarea segmentului CH intersectează latura AC în Q.

5p **a)** Arătați că $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC} = \dfrac{1}{2}$.

5p **b)** Demonstrați că $BH \cdot HE = CH \cdot HF$.

5p **c)** Demonstrați că $BP + CQ = PQ$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră x_1, x_2 și x_3 rădăcinile polinomului $f = X^3 + aX^2 + X + 1$, unde a este număr complex.

5p **a)** Determinați numărul complex a, știind că polinomul f se divide cu polinomul $X + a$.

5p **b)** Pentru $a = 1$, demonstrați că $(x_1 + x_2 + x_3)^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$.

5p **c)** Determinați numerele întregi a pentru care polinomul f are o rădăcină rațională.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\,\mathrm{arctg}\left(x^2+1\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \mathrm{arctg}\left(x^2+1\right) + \dfrac{2x^2}{1+\left(x^2+1\right)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați primitiva $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a funcției f, știind că $F(0) = \dfrac{\pi}{8}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

Următoarea secvenţă face parte din programa şcolară de matematică pentru clasa a IX-a (3 ore).

Competenţe specifice	**Conţinuturi**
1. ***Recunoaşterea*** *corespondenţei dintre seturi de date şi reprezentări grafice* *2.* ***Reprezentarea*** *grafică a unor date diverse în vederea comparării variaţiei lor* *3.* ***Aplicarea*** *formulelor de calcul şi a lecturii*	***Interpretarea geometrică a proprietăţilor algebrice ale funcţiei de gradul al II-lea*** • *Monotonie; punct de extrem (vârful parabolei), interpretare geometrică* • *Poziţionarea parabolei faţă de axa Ox, semnul*

grafice pentru rezolvarea de ecuaţii, inecuaţii şi sisteme de ecuaţii 4. ***Exprimarea** prin reprezentări grafice a unor condiţii algebrice; exprimarea prin condiţii algebrice a unor reprezentări grafice* 5. ***Determinarea** unor relaţii între condiţii algebrice date şi graficul funcţiei de gradul al II-lea* 6. ***Utilizarea** monotoniei şi a punctelor de extrem în optimizarea rezultatelor unor probleme practice*	*funcţiei, inecuaţii de forma* $ax^2+bx+c\le 0$ $(\ge, <, >)$, $a, b, c\in\mathbb{R}$, $a\ne 0$, *interpretare geometrică* • *Poziţia relativă a unei drepte faţă de o parabolă: rezolvarea sistemelor de forma* $\begin{cases} mx+n=y \\ ax^2+bx+c=y \end{cases}$, *cu* $a, b, c, m, n\in\mathbb{R}$, *interpretare geometrică*

(Programa şcolară de matematică, OMECI nr. 5099 / 09.09.2009)

În vederea evaluării formării/dezvoltării competenţelor specifice din secvenţa dată, elaboraţi 6 itemi de următoarele tipuri: *un item de tip alegere multiplă*, *un item de tip pereche*, *un item cu răspuns scurt*, *un item de completare*, *un item de tip întrebare structurată* şi *un item de tip rezolvare de probleme*, menționând pentru fiecare item competenţa/competenţele evaluate.

Notă. Pentru fiecare dintre itemii elaborați se punctează menționarea competenţei/competenţelor evaluate, respectarea formatului itemului, elaborarea detaliată și corectitudinea răspunsului aşteptat (baremul de evaluare) și corectitudinea științifică a informaţiei de specialitate.

CONCURSUL NAȚIONAL PENTRU OCUPAREA POSTURILOR /CATEDRELOR DECLARATE VACANTE/REZERVATE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR

17 iulie 2019

Probă scrisă
MATEMATICĂ

Varianta 3

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Se punctează orice modalitate de rezolvare corectă a cerințelor, în limita punctajului maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**a)** $a_4 = a_1 + 3r$, deci $a_1 + 3\left(\sqrt{2}-1\right) = 3\sqrt{2}$	**3p**
	$a_1 = 3$	**2p**
	b) $a_1 + a_2 + \ldots + a_9 = 36\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{9(2a_1+8r)}{2} = 36\sqrt{2}$, deci $a_1 + 4r = 4\sqrt{2} \Rightarrow a_4 + r = 4\sqrt{2}$	**3p**
	$r = \sqrt{2}$	**2p**
	c) Presupunem, prin reducere la absurd, că există doi termeni raționali a_p și a_q, cu $p \neq q$, deci $a_p = a_4 + (p-4)r$ și $a_q = a_4 + (q-4)r$, unde $p, q \in \mathbb{N}^*$	**2p**
	$(q-4)a_p = (q-4)a_4 + (q-4)(p-4)r$ și $(p-4)a_q = (p-4)a_4 + (p-4)(q-4)r$, de unde obținem $a_4 = \frac{(q-4)a_p - (p-4)a_q}{q-p}$, deci $a_4 \in \mathbb{Q}$, ceea ce este o contradicție	**3p**
2.	**a)** $BE \perp AC \Rightarrow \Delta ABE$ este dreptunghic, deci $\cos(\sphericalangle BAE) = \frac{AE}{AB}$ și, cum $\sphericalangle BAE$ are măsura de $60°$, obținem $\frac{AE}{AB} = \frac{1}{2}$	**2p**
	$CF \perp AB \Rightarrow \Delta AFC$ este dreptunghic, deci $\cos(\sphericalangle CAF) = \frac{AF}{AC}$ și, cum $\sphericalangle CAF$ are măsura de $60°$, obținem $\frac{AF}{AC} = \frac{1}{2} = \frac{AE}{AB}$	**3p**
	b) $\sphericalangle BHF \equiv \sphericalangle CHE$ și, cum ΔBHF este dreptunghic în F și ΔCHE este dreptunghic în E, obținem $\Delta BHF \sim \Delta CHE$	**3p**
	$\frac{BH}{CH} = \frac{HF}{HE}$, deci $BH \cdot HE = CH \cdot HF$	**2p**
	c) P aparține mediatoarei segmentului BH, deci $BP = PH$ și Q aparține mediatoarei segmentului CH, deci $CQ = HQ$, deci $BP + CQ = PH + HQ$	**1p**
	$\sphericalangle BHF$ și $\sphericalangle CHE$ au măsura de $60°$ și, cum $\sphericalangle BHP$ are măsura de $30°$ și $\sphericalangle CHQ$ are măsura de $30°$, obținem că $(HP$ și $(HQ$ sunt bisectoarele a două unghiuri opuse la vârf, deci sunt semidrepte opuse	**3p**
	P, H și Q sunt coliniare în această ordine, deci $PH + HQ = PQ$, de unde $BP + CQ = PQ$	**1p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** Polinomul f se divide cu polinomul $X+a \Leftrightarrow f(-a)=0$	**3p**
	$-a^3+a^3-a+1=0$, deci $a=1$	**2p**
	b) $f=(X^2+1)(X+1)$, deci $x_1=-1$, $x_2=i$ și $x_3=-i$	**3p**
	$(x_1+x_2+x_3)^3=-1$ și $x_1^3+x_2^3+x_3^3=(-1)^3+i^3+(-i)^3=-1 \Rightarrow (x_1+x_2+x_3)^3=x_1^3+x_2^3+x_3^3$	**2p**
	c) $x_1=\dfrac{p}{q}$, $p,q\in\mathbb{Z}$, $q\neq 0$ și $(p,q)=1$, cum $a\in\mathbb{Z}$, obținem $p\mid 1$ și $q\mid 1$, deci $x_1=-1$ sau $x_1=1$	**3p**
	$x_1=-1\Leftrightarrow a=1$; $x_1=1\Leftrightarrow a=-3$	**2p**
2.	**a)** $f'(x)=x'\operatorname{arctg}(x^2+1)+x\cdot\dfrac{(x^2+1)'}{1+(x^2+1)^2}=$	**2p**
	$=1\cdot\operatorname{arctg}(x^2+1)+x\cdot\dfrac{2x}{1+(x^2+1)^2}=\operatorname{arctg}(x^2+1)+\dfrac{2x^2}{1+(x^2+1)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
	b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}(x^2+1)=\dfrac{\pi}{2}$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\dfrac{\pi}{2}x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\operatorname{arctg}(x^2+1)-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^3}{1+(x^2+1)^2}=0$, deci dreapta de ecuație $y=\dfrac{\pi}{2}x$ este asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
	c) $\int f(x)dx=\dfrac{1}{2}\int(x^2+1)'\operatorname{arctg}(x^2+1)dx=\dfrac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}(x^2+1)-\dfrac{1}{2}\int(x^2+1)\dfrac{(x^2+1)'}{1+(x^2+1)^2}dx=$ $=\dfrac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}(x^2+1)-\dfrac{1}{4}\ln\left(1+(x^2+1)^2\right)+\mathcal{C}\Rightarrow F(x)=\dfrac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}(x^2+1)-\dfrac{1}{4}\ln\left(1+(x^2+1)^2\right)+c$, $c\in\mathbb{R}$	**3p**
	$F(0)=\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{4}\ln 2+c\Rightarrow c=\dfrac{1}{4}\ln 2$, deci $F(x)=\dfrac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}(x^2+1)-\dfrac{1}{4}\ln\left(1+(x^2+1)^2\right)+\dfrac{1}{4}\ln 2$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

Itemul de tip alegere multiplă elaborat:	
- menționarea competenţei/competenţelor evaluate	**1p**
- respectarea formatului itemului	**1p**
- elaborarea detaliată și corectitudinea răspunsului aşteptat (baremul de evaluare)	**2p**
- corectitudinea ştiinţifică a informaţiei de specialitate	**1p**
Itemul de tip pereche elaborat:	
- menționarea competenţei/competenţelor evaluate	**1p**
- respectarea formatului itemului	**1p**
- elaborarea detaliată și corectitudinea răspunsului aşteptat (baremul de evaluare)	**2p**
- corectitudinea ştiinţifică a informaţiei de specialitate	**1p**
Itemul cu răspuns scurt elaborat:	
- menționarea competenţei/competenţelor evaluate	**1p**
- respectarea formatului itemului	**1p**

- elaborarea detaliată și corectitudinea răspunsului aşteptat (baremul de evaluare)	**2p**
- corectitudinea ştiinţifică a informaţiei de specialitate	**1p**
Itemul de completare elaborat:	
- menționarea competenţei/competenţelor evaluate	**1p**
- respectarea formatului itemului	**1p**
- elaborarea detaliată și corectitudinea răspunsului aşteptat (baremul de evaluare)	**2p**
- corectitudinea ştiinţifică a informaţiei de specialitate	**1p**
Itemul de tip întrebare structurată elaborat:	
- menționarea competenţei/competenţelor evaluate	**1p**
- respectarea formatului itemului	**1p**
- elaborarea detaliată și corectitudinea răspunsului aşteptat (baremul de evaluare)	**2p**
- corectitudinea ştiinţifică a informaţiei de specialitate	**1p**
Itemul de tip rezolvare de probleme elaborat:	
- menționarea competenţei/competenţelor evaluate	**1p**
- respectarea formatului itemului	**1p**
- elaborarea detaliată și corectitudinea răspunsului aşteptat (baremul de evaluare)	**2p**
- corectitudinea ştiinţifică a informaţiei de specialitate	**1p**