

**Examenul de bacalaureat național 2019**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M\_mate-info$**

**Varianta 2**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Determinați suma primilor trei termeni ai progresiei geometrice  $(b_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $b_1 = 1$  și  $b_2 = 3$ .
- 5p** 2. Se consideră  $x_1$  și  $x_2$  soluțiile ecuației  $x^2 + mx + 7 = 0$ , unde  $m$  este număr real. Determinați numărul real  $m$  pentru care  $2x_1 + 2x_2 + 3x_1x_2 = 1$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_2(x-2) + \log_2(x+2) = 5$ .
- 5p** 4. Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ .
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(2, 6)$  și  $B(6, 2)$ . Determinați coordonatele punctului  $M$ , știind că  $\overline{AM} = \overline{MB}$ .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul  $ABC$  cu  $AB = 3\sqrt{3}$ ,  $AC = 4$  și  $A = \frac{2\pi}{3}$ . Arătați că aria triunghiului  $ABC$  este egală cu 9.

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea  $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & -1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$  și sistemul de ecuații  $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x - ay - z = 1, \\ x + y + az = 2 \end{cases}$  unde  $a$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $\det(A(0)) = 0$ .
- 5p** b) Demonstrați că  $\det(A(a)) = a(1-a)(1+a)$ , pentru orice număr real  $a$ .
- 5p** c) Pentru  $a = 0$ , demonstrați că sistemul de ecuații are o infinitate de soluții de forma  $(x_0, y_0, z_0)$  cu  $x_0, y_0$  și  $z_0$  numere întregi.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = (x - 2019)(y - 2019) + 2019$ .
- 5p** a) Arătați că  $x * 2019 = 2019$ , pentru orice număr real  $x$ .
- 5p** b) Determinați numerele reale  $x$ , știind că  $(x * x) * x = x$ .
- 5p** c) Determinați perechile de numere întregi  $m$  și  $n$  pentru care  $m * n = 2020$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{2x}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .
- 5p** b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției  $f$ , în punctul de abscisă  $x = 1$ , situat pe graficul funcției  $f$ .
- 5p** c) Demonstrați că  $\sqrt{x} - \ln \frac{x}{4} \geq 2$ , pentru orice  $x \in (0, +\infty)$ .

2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 9}$ .

5p a) Arătați că  $\int_0^1 (x^2 + 9) f(x) dx = \frac{1}{3}$ .

5p b) Demonstrați că orice primitivă a funcției  $f$  are un singur punct de inflexiune.

5p c) Pentru fiecare număr natural nenul  $n$ , se consideră  $I_n = \int_0^1 x^{2n} f(x) dx$ . Arătați că  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ .

**Examenul de bacalaureat național 2019**

**Proba E. c)**

**Matematică M\_mate-info**

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Varianta 2**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

<b>1.</b>	$q = 3 \Rightarrow b_3 = 9$ $b_1 + b_2 + b_3 = 1 + 3 + 9 = 13$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>2.</b>	$x_1 + x_2 = -m, x_1 x_2 = 7$ $-2m + 21 = 1$ , deci $m = 10$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>3.</b>	$(x - 2)(x + 2) = 2^5 \Rightarrow x^2 - 36 = 0$ $x = -6$ , care nu convine, $x = 6$ , care convine	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>4.</b>	Prima cifră se poate alege în 5 moduri Pentru fiecare alegere a primei cifre, a doua cifră se poate alege în câte 4 moduri Pentru fiecare alegere a primelor două cifre, a treia cifră se poate alege în câte 3 moduri, deci se pot forma $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ de numere	<b>1p</b> <b>1p</b> <b>3p</b>
<b>5.</b>	Punctul $M$ este mijlocul segmentului $AB$ $x_M = 4, y_M = 4$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>6.</b>	$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \frac{2\pi}{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} =$ $= \frac{12 \cdot 3}{4} = 9$	<b>3p</b> <b>2p</b>

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$ $= 0 + 1 + (-1) - 0 - 0 - 0 = 0$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>b)</b>	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & -1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = -a^3 + a =$ $= a(1 - a^2) = a(1 - a)(1 + a)$ , pentru orice număr real $a$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	Pentru $a = 0$ , sistemul este compatibil nedeterminat și soluțiile sistemului sunt de forma $(1 + \alpha, 1 - \alpha, \alpha)$ , unde $\alpha \in \mathbb{R}$ Pentru orice $\alpha$ număr întreg, numerele $x_0 = 1 + \alpha, y_0 = 1 - \alpha$ și $z_0 = \alpha$ sunt întregi	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>2.a)</b>	$x * 2019 = (x - 2019)(2019 - 2019) + 2019 =$ $= 0 + 2019 = 2019$ , pentru orice număr real $x$	<b>3p</b> <b>2p</b>

<b>b)</b>	$x * x = (x - 2019)^2 + 2019, (x * x) * x = (x - 2019)^3 + 2019$ $(x - 2019)^3 + 2019 = x \Leftrightarrow (x - 2019)((x - 2019)^2 - 1) = 0$ , deci $x = 2018$ sau $x = 2019$ sau $x = 2020$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	$(m - 2019)(n - 2019) + 2019 = 2020 \Leftrightarrow (m - 2019)(n - 2019) = 1$ Cum $m$ și $n$ sunt numere întregi, obținem $m = 2018, n = 2018$ sau $m = 2020, n = 2020$	<b>2p</b> <b>3p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} =$ $= \frac{\sqrt{x}}{2x} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x} - 2}{2x}, x \in (0, +\infty)$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$f(1) = 1, f'(1) = -\frac{1}{2}$ Ecuația tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$ , adică $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$ $x \in (0, 4] \Rightarrow f'(x) \leq 0$ , deci $f$ descrescătoare pe $(0, 4]$ și $x \in [4, +\infty) \Rightarrow f'(x) \geq 0$ , deci $f$ este crescătoare pe $[4, +\infty)$ Cum $f(4) = 2 - \ln 4$ , obținem $f(x) \geq 2 - \ln 4$ , deci $\sqrt{x} - \ln \frac{x}{4} \geq 2$ , pentru orice $x \in (0, +\infty)$	<b>1p</b> <b>2p</b> <b>2p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_0^1 (x^2 + 9) f(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big _0^1 =$ $= \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$F'(x) = f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 9}, F''(x) = f'(x) = \frac{18x}{(x^2 + 9)^2}, x \in \mathbb{R}$ , unde funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a lui $f$ $F''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $x \in (-\infty, 0) \Rightarrow F''(x) < 0$ și $x \in (0, +\infty) \Rightarrow F''(x) > 0$ , deci $F$ are un singur punct de inflexiune	<b>2p</b> <b>1p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$x \in [0, 1] \Rightarrow x^{2n} \geq 0$ și, cum $0 \leq f(x) \leq 1$ , obținem $0 \leq x^{2n} f(x) \leq x^{2n}$ $0 \leq I_n = \int_0^1 x^{2n} f(x) dx \leq \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \Big _0^1 = \frac{1}{2n+1}$ și $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$ , deci $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$	<b>2p</b> <b>3p</b>