Examenul de bacalaureat naţional 2019
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numărul $n=\left(3-i\sqrt{2}\right)\left(3+i\sqrt{2}\right)$ este întreg, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Determinați numărul real a, știind că punctul $A(a,3)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+a$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2019^x+2019^{-x}=2$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra unităților impară.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,-3)$ și $B(2,-2)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin A și este perpendiculară pe AB.

5p **6.** Arătați că $\sin(a-b)\sin(a+b)=(\sin a-\sin b)(\sin a+\sin b)$, pentru orice numere reale a și b.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & 2 & 0 \\ -a & 0 & a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(a))=0$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)A(b)=2A(ab)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Demonstrați că matricea $B=A(\log_2 3)\cdot A(\log_3 4)\cdot A(\log_4 5)\cdot\ldots\cdot A(\log_{15}16)$ are toate elementele numere întregi.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+X^2+mX+n$, unde m și n sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $f(-1)-2f(0)+f(1)=2$, pentru orice numere reale m și n.

5p **b)** Determinaţi numerele reale m și n, știind că polinomul f este divizibil cu polinomul X^2-1.

5p **c)** Demonstrați că $3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_1x_2x_3)-\left(x_1^3+x_2^3+x_3^3\right)=1$, pentru orice numere reale m și n, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2e^{-x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=x(2-x)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi intervalele de monotonie a funcţiei f.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice $a\in\left(0,4e^{-2}\right)$, ecuația $f(x)=a$ are exact trei soluții reale.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^2 \left(f(x)-\ln x\right)dx=\frac{7}{3}$.

5p **b)** Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-x^2+f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$ are aria egală cu e^2.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{e^{-1}}^{1} x^n\left(f(x)-x^2\right)dx=0$.

Examenul de bacalaureat naţional 2019
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$n=3^2-\left(i\sqrt{2}\right)^2=$	**2p**
	$=9-2i^2=11\in\mathbb{Z}$	**3p**
2.	$f(a)=3\Rightarrow 2a+a=3$	**3p**
	$a=1$	**2p**
3.	$2019^x+2019^{-x}-2=0\Leftrightarrow\left(2019^x-1\right)^2=0$	**3p**
	$2019^x=1$, deci $x=0$	**2p**
4.	Mulţimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Mulţimea numerelor naturale de două cifre care au cifra unităţilor impară are 45 de elemente, deci sunt 45 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{45}{90}=\dfrac{1}{2}$	**1p**
5.	$m_{AB}=-1\Rightarrow m_d=1$	**2p**
	Ecuaţia dreptei d este $y-y_A=m_d\left(x-x_A\right)$, deci $y=x-6$	**3p**
6.	$\sin(a-b)\sin(a+b)=\sin^2a\cdot\cos^2b-\sin^2b\cdot\cos^2a=$	**2p**
	$=\sin^2a\left(1-\sin^2b\right)-\sin^2b\left(1-\sin^2a\right)=\sin^2a-\sin^2b=(\sin a-\sin b)(\sin a+\sin b)$, pentru orice numere reale a şi b	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det\left(A(a)\right)=\begin{vmatrix}a & 0 & -a\\ 0 & 2 & 0\\ -a & 0 & a\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=2a^2+0+0-2a^2-0-0=0$, pentru orice număr real a	**3p**
b)	$A(a)A(b)=\begin{pmatrix}2ab & 0 & -2ab\\ 0 & 4 & 0\\ -2ab & 0 & 2ab\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}ab & 0 & -ab\\ 0 & 2 & 0\\ -ab & 0 & ab\end{pmatrix}=2A(ab)$, pentru orice numere reale a şi b	**2p**
c)	$B=2^{13}A\left(\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\ldots\cdot\log_{15}16\right)=2^{13}A\left(\log_2 16\right)=$	**3p**
	$=2^{13}A(4)$, care are toate elementele numere întregi	**2p**

2.a)	$f(-1)=-m+n$, $f(0)=n$	**2p**
	$f(1)=2+m+n \Rightarrow f(-1)-2f(0)+f(1)=-m+n-2n+2+m+n=2$, pentru orice numere reale m și n	**3p**
b)	f este divizibil cu $X^2-1 \Leftrightarrow f(-1)=0$ și $f(1)=0$	**3p**
	$m=-1$, $n=-1$	**2p**
c)	$x_1+x_2+x_3=-1$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=m$, $x_1x_2x_3=-n$, $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-1+3m-3n$	**3p**
	$3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_1x_2x_3)-\left(x_1^3+x_2^3+x_3^3\right)=3(m-n)-(-1+3m-3n)=1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=$	**3p**
	$=\left(2x-x^2\right)e^{-x}=x(2-x)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ sau $x=2$	**2p**
	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,0]$, deci f este descrescătoare pe $(-\infty,0]$, $f'(x)\ge 0$ pentru orice $x\in[0,2]$, deci f este crescătoare pe $[0,2]$ și $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in[2,+\infty)$, deci f este descrescătoare pe $[2,+\infty)$	**3p**
c)	$f(0)=0<a$, $f(2)=4e^{-2}>a$ și $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0<a$, pentru orice $a\in\left(0,4e^{-2}\right)$	**3p**
	Cum $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, f este continuă pe $\mathbb{R}$ și f este strict monotonă pe $(-\infty,0)$, pe $(0,2)$ și pe $(2,+\infty)$, ecuația $f(x)=a$ are exact trei soluții reale	**2p**
2.a)	$\int_1^2 (f(x)-\ln x)\,dx=\int_1^2 x^2\,dx=\left.\frac{x^3}{3}\right\|_1^2=$	**3p**
	$=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$	**2p**
b)	$g(x)=2x+\ln x \Rightarrow \mathcal{A}=\int_1^e \lvert g(x)\rvert\,dx=\int_1^e (2x+\ln x)\,dx=\left.x^2\right\|_1^e+\left.x\ln x\right\|_1^e-\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}\,dx=$	**3p**
	$=e^2-1+e-0-(e-1)=e^2$	**2p**
c)	$\int_{e^{-1}}^1 x^n\left(f(x)-x^2\right)dx=\int_{e^{-1}}^1 x^n\ln x\,dx=\left.\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right)\right\|_{e^{-1}}^1=\frac{1}{(n+1)e^{n+1}}-\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^2e^{n+1}}$	**3p**
	$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{e^{-1}}^1 x^n\left(f(x)-x^2\right)dx=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{(n+1)e^{n+1}}-\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^2e^{n+1}}\right)=0$	**2p**