

**Examenul de bacalaureat național 2019**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{tehnologic}$**

**Varianta 6**

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Arătați că  $\sqrt{7}(\sqrt{7}+1) - \sqrt{7} = 7$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 6x + 8$ . Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției  $f$  cu axa  $Oy$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_5(x^2 + 9) = 2$ .
- 5p** 4. După o ieftinire cu 40%, prețul unui obiect este 300 de lei. Calculați prețul obiectului înainte de ieftinire.
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(3,2)$ ,  $B(-3,2)$  și  $C(0,6)$ . Determinați, în triunghiul  $ABC$ , lungimea medianei din vârful  $C$ .
- 5p** 6. Arătați că  $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin 60^\circ - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{4}$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 6 & -10 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ ,  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $M(a) = I_2 + aA$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $\det A = 0$ .
- 5p** b) Demonstrați că  $M(a) \cdot M(b) = M(a+b+ab)$ , pentru orice numere reale  $a$  și  $b$ .
- 5p** c) Determinați numărul real  $a$  pentru care  $M(1) + M(2) + \dots + M(2019) = 2019M(a)$ .
- 2.** Se consideră polinomul  $f = mX^3 + 2X^2 - mX - 2$ , unde  $m$  este număr real nenul.
- 5p** a) Arătați că  $f(1) = 0$ , pentru orice număr real nenul  $m$ .
- 5p** b) Pentru  $m = 3$ , determinați rădăcinile polinomului  $f$ .
- 5p** c) Determinați numărul real nenul  $m$  pentru care  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = -4$ , unde  $x_1$ ,  $x_2$  și  $x_3$  sunt rădăcinile polinomului  $f$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

- 1.** Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 - 3x + 5$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Demonstrați că funcția  $f$  este convexă pe  $[0, +\infty)$ .
- 5p** c) Demonstrați că  $f(x) \leq 7$ , pentru orice  $x \in (-\infty, 1]$ .
- 2.** Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{3x^2 + 6x + 7}$ .
- 5p** a) Arătați că  $\int_0^1 f^2(x) dx = 11$ .
- 5p** b) Calculați  $\int_{-1}^1 \frac{x+1}{f(x)} dx$ .
- 5p** c) Demonstrați că, pentru orice  $a \in (0, +\infty)$ , suprafața plană delimitată de graficul funcției  $f$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x = 0$  și  $x = a$  are aria mai mare sau egală cu  $a\sqrt{7}$ .

**Examenul de bacalaureat național 2019**  
**Proba E. c)**  
**Matematică M\_tehnologic**  
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Varianta 6**

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{7}(\sqrt{7}+1)-\sqrt{7}=\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}+\sqrt{7}-\sqrt{7}=$ $=7+0=7$	2p 3p
2.	$f(0)=8$ Coordonatele punctului de intersecție cu axa $Oy$ sunt $x=0$ și $y=8$	3p 2p
3.	$x^2+9=5^2\Rightarrow x^2-16=0$ $x=-4$ sau $x=4$ , care convin	2p 3p
4.	$x-\frac{40}{100}\cdot x=300$ , unde $x$ este prețul obiectului înainte de ieftinire $x=500$ de lei	3p 2p
5.	$M(0,2)$ , unde punctul $M$ este mijlocul laturii $AB$ $CM=4$	2p 3p
6.	$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ , $\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin 60^\circ-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{4}-\frac{2}{4}=\frac{1}{4}$	2p 3p

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix} 6 & -10 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}=6\cdot(-5)-3\cdot(-10)=$ $=-30+30=0$	3p 2p
b)	$A\cdot A=A$ și $M(a)\cdot M(b)=(I_2+aA)(I_2+bA)=I_2+aA+bA+abA\cdot A=$ $=I_2+aA+bA+abA=I_2+(a+b+ab)A=M(a+b+ab)$ , pentru orice numere reale $a$ și $b$	2p 3p
c)	$(I_2+A)+(I_2+2A)+\dots+(I_2+2019A)=2019I_2+(1+2+\dots+2019)A=$ $=2019(I_2+1010A)=2019M(1010)$ , de unde obținem $a=1010$	3p 2p
2.a)	$f(1)=m\cdot 1^3+2\cdot 1^2-m\cdot 1-2=$ $=m+2-m-2=0$ , pentru orice număr real nenul $m$	3p 2p
b)	$f=3X^3+2X^2-3X-2\Rightarrow f=(X-1)(X+1)(3X+2)$ $x_1=-1$ , $x_2=-\frac{2}{3}$ , $x_3=1$	2p 3p
c)	$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-1$ , $x_1x_2x_3=\frac{2}{m}$ $\frac{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}{x_1x_2x_3}=-4\Leftrightarrow\frac{-m}{2}=-4\Leftrightarrow m=8$	2p 3p

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = 3x^2 - 3 =$ $= 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1), x \in \mathbb{R}$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$f''(x) = 6x, x \in \mathbb{R}$ $f''(x) \geq 0$ , pentru orice $x \in [0, +\infty)$ , deci funcția $f$ este convexă pe $[0, +\infty)$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	$f'(x) \geq 0$ , pentru orice $x \in (-\infty, -1] \Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-\infty, -1]$ și $f'(x) \leq 0$ , pentru orice $x \in [-1, 1] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[-1, 1]$ $f(x) \leq f(-1)$ , pentru orice $x \in (-\infty, 1]$ și $f(-1) = 7$ , deci $f(x) \leq 7$ , pentru orice $x \in (-\infty, 1]$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_0^1 f^2(x) dx = \int_0^1 (3x^2 + 6x + 7) dx = \left( \frac{3x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} + 7x \right) \Big _0^1 =$ $= 1 + 3 + 7 - 0 = 11$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$\int_{-1}^1 \frac{x+1}{f(x)} dx = \int_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt{3x^2 + 6x + 7}} dx = \frac{1}{3} \sqrt{3x^2 + 6x + 7} \Big _{-1}^1 =$ $= \frac{1}{3} (\sqrt{16} - \sqrt{4}) = \frac{2}{3}$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$\sqrt{3x^2 + 6x + 7} \geq \sqrt{7}$ , pentru orice $x \in [0, +\infty)$ $\mathcal{A} = \int_0^a  f(x)  dx = \int_0^a \sqrt{3x^2 + 6x + 7} dx \geq \int_0^a \sqrt{7} dx = a\sqrt{7}$ , pentru orice $a \in (0, +\infty)$	<b>2p</b> <b>3p</b>