EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI A VIII-a
REZOLVARE CU BAREM ȘI COMENTARII

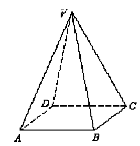
PROF. ȘTEFAN SMĂRĂNDOIU
Școala Gimnazială „*Take Ionescu*”, Râmnicu Vâlcea

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

Nr. crt.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Rezultat	21	150	1	40	16	5
Punctaj	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p	5 p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Desenează piramida patrulateră regulată. **4p**



Notează piramida patrulateră regulată. **1p**

2. $a=3\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=3\cdot\left(\frac{3}{6}-\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\right)=3\cdot\frac{2}{6}=1$ **2p**

$b=\frac{5}{3}:\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{3}:\left(\frac{6}{12}+\frac{3}{12}-\frac{4}{12}\right)=\frac{5}{3}:\frac{5}{12}=\frac{5}{3}\cdot\frac{12}{5}=4$ $\quad m.g(a;b)=\sqrt{ab}=\sqrt{4}=2.$ **3p**

3. Din teorema împărțirii cu rest, deducem că există câturile $c,t,a\in\mathbb{N}$, astfel încât:

$73=n\cdot c+1,$ cu condiția $1<n,$ $123=n\cdot t+3,$ cu condiția $3<n,$ respectiv, $223=n\cdot a+7,$ cu condiția $7<n.$

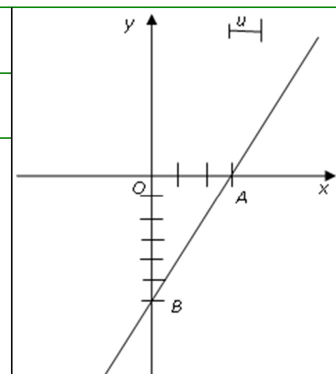
Din $\left.\begin{array}{l}1<n\\3<n\\7<n\end{array}\right\}\Rightarrow n>7.$ $\quad\left.\begin{array}{l}73=n\cdot c+1\Rightarrow 72=n\cdot c\Rightarrow 72\,\vdots\, n\\123=n\cdot t+3\Rightarrow 120=n\cdot t\Rightarrow 120\,\vdots\, n\\223=n\cdot a+7\Rightarrow 216=n\cdot a\Rightarrow 216\,\vdots\, n\end{array}\right\}\Rightarrow$ **3p**

$\Rightarrow(72;120;216)\,\vdots\, n;$ $\quad\left.\begin{array}{l}72=2^3\cdot 3^2\\120=2^3\cdot 3\cdot 5\\216=2^3\cdot 3^3\end{array}\right\}\Rightarrow(72;120;216)=2^3\cdot 3=24.$ $\quad\left.\begin{array}{l}24\,\vdots\, n\\n\in\mathbb{N}^*\\n>7\\ \text{n este cel mai mare}\end{array}\right\}\Rightarrow n=24.$ **2p**

4.*a)* Reprezentarea corectă a unui punct ce aparține graficului **2p**
$x=0\Rightarrow f(0)=2\cdot 0-6=-6.$ $\quad B(0;-6)$

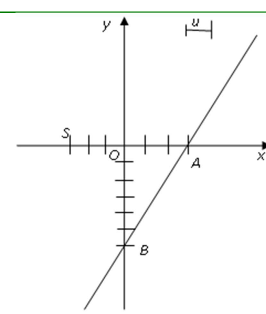
Reprezentarea corectă a altui punct ce aparține graficului **2p**
$f(x)=0\Leftrightarrow 2x-6=0\Rightarrow x=3.$ $\quad A(3;0)$

Trasarea dreptei *AB.* **1p**



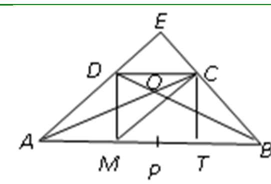
b) S este simetricul lui P față de $O\Rightarrow O$ este mijlocul segmentului $[SP]$.

$\left.\begin{array}{l}P(0;3)\\O(0;0)\\ \text{O este mijlocul segmentului } [SP]\end{array}\right\}\Rightarrow S(-3;0).$ **2p**



	$S(-3;0)\in R_{G_g}\Rightarrow\begin{cases}-3\in D_g=\mathbb{R},\ evident;\\ g(-3)=0.\end{cases}$ *Prin calcul* $\left.\begin{matrix} g(-3)=-3m+9\\ g(-3)=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow -3m+9=0\Leftrightarrow -3m=-9\Rightarrow m=3.$ $\left.\begin{matrix} m=3\\ Din\ ipoteză\ m\in\mathbb{R}\end{matrix}\right\}\Rightarrow m=3$ *este solutie.*	**3p**
5.	$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1;3\}\Rightarrow E(x)=\left[\frac{x(x-1)}{(x-1)(x-3)}-\frac{3}{x-3}-\frac{x}{x+1}\right]\cdot\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=$	**2p**
	$=\left(\frac{x}{x-3}-\frac{3}{x-3}-\frac{x}{x+1}\right)\cdot\frac{x+1}{1}=\left(\frac{x-3}{x-3}-\frac{x}{x+1}\right)\cdot\frac{x+1}{1}=\left(1-\frac{x}{x+1}\right)\cdot\frac{x+1}{1}=\frac{x+1-x}{x+1}\cdot\frac{x+1}{1}=1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	Din ipoteză $ABCD$ este trapez isoscel cu $AB\parallel CD$ și $AC\cap BD=\{O\}$ (1) **Metoda I:** $DM\perp CD\Rightarrow\Delta MAD$ este dreptunghic în $M\Rightarrow\cos AMD=\frac{AM}{AD}\Leftrightarrow$  	**2p**
	$\Leftrightarrow\cos 45^\circ=\frac{AM}{24\,m}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{AM}{24\,m}\Rightarrow AM=12\sqrt{2}\ m.$	**3p**
	Metoda a II-a: $\left.\begin{matrix}DM\perp CD\Rightarrow\Delta MAD\ este\ dreptunghic\ în\ M\\ m(\sphericalangle AMD)=45^\circ\end{matrix}\right\}\Rightarrow\Delta MAD$ *este dreptunghic isoscel* $\Rightarrow AM=AD.$ $\left.\begin{matrix}\Delta MAD\ este\ dreptunghic\Rightarrow AM^2+DM^2=AD^2\\ AM=DM\ si\ AD=24m\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{cases}2AM^2=(24\,m)^2\\ AM>0\end{cases}\right\}\Rightarrow AM=12\sqrt{2}\,m.$ **SAU:** ΔMAD *este dreptunghic isoscel* $\Rightarrow AD=AM\sqrt{2}\Leftrightarrow 24m=AM\sqrt{2}\Rightarrow AM=12\sqrt{2}\ m.$ (Diagonala unui pătrat împarte pătratul în două triunghiuri dreptunghic-isoscele și cum diagonala pătratului are lungimea $l\sqrt{2}$, tot astfel, ipotenuza triunghiului dreptunghic isoscel are lungimea „ $cateta\sqrt{2}$,,).	
b)	$\left.\begin{matrix}\left.\begin{matrix}Fie\ CT\perp AB\\ DM\perp AB\end{matrix}\right\}\Rightarrow CT\parallel DM\\ Din\ (1)\Rightarrow CD\parallel TM\end{matrix}\right\}\Rightarrow MTCD\ este\ paralelogram\Rightarrow MT=CD=12\sqrt{2}m.$ **Observație:** Putem demonstra că $\left.\begin{matrix}MTCD\ este\ paralelogram\\ m(\sphericalangle DMT)=90^\circ\end{matrix}\right\}\Rightarrow MTCD\ este\ dreptunghi.$ $\left.\begin{matrix}\Delta AMD\ este\ dreptunghic\ în\ M\\ CT\perp AB\Rightarrow\Delta BTC\ este\ dreptunghic\ în\ T\\ AD=BC\Rightarrow[AD]\equiv[BC]\\ Din\ (1)\Rightarrow\sphericalangle A\equiv\sphericalangle B\end{matrix}\right\}\Rightarrow\Delta AMD\equiv\Delta BTC\Rightarrow[AM]\equiv[BT]\Rightarrow AM=BT=12\sqrt{2}m.$ $AB=AM+MT+BT=12\sqrt{2}m\cdot 3=36\sqrt{2}m.$ **Observație:** Putem calcula AB și folosind $AM=BT=\frac{AB-CD}{2}.$ **Metoda a II-a pentru a calcula *AB*** $\left.\begin{matrix}\left.\begin{matrix}AM=12\sqrt{2}\ m\\ CD=12\sqrt{2}\ m\end{matrix}\right\}\Rightarrow AM=CD\Rightarrow[AM]\equiv[CD]\\ Din\ (1)\Rightarrow CD\parallel AM\end{matrix}\right\}\Rightarrow AMCD\ este\ paralelogram\Rightarrow\begin{cases}CM=AD=24\,m\\ CM\parallel AD\end{cases}.$ $\left.\begin{matrix}CM\parallel AD\\ \sphericalangle DAB\ si\ \sphericalangle CMB\ sunt\ corespondente\\ formate\ de\ dreptele\ AD\ si\ CM\ cu\ secanta\ AB\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\sphericalangle DAB\equiv\sphericalangle CMB\Rightarrow m(\sphericalangle CMB)=m(\sphericalangle DAB)=45^\circ\Rightarrow\Delta CMB$ este dreptunghic în $C\Rightarrow MB^2=MC^2+BC^2=(24cm)^2+(24cm)^2=(24cm)^2\cdot 2.$ $\left.\begin{matrix}MB^2=(24m)^2\cdot 2\\ MB>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow MB=24\sqrt{2}\ m.$ $AB=AM+MB=12\sqrt{2}\ m+24\sqrt{2}\ m=36\sqrt{2}\ m.$	**1p**

Din (1) și $m(\sphericalangle BAD)=45^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle CBA)=45^\circ$.

Varianta 1: Calculăm înălțimea corespunzătoare ipotenuzei în triunghiul *EAB*

Fie P mijlocul bazei mari, $[AB] \Rightarrow [AM] \equiv [MB] \Rightarrow AM = MB = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{36\sqrt{2}\,m}{2} = 18\sqrt{2}\,m.$

2p

$$\left.\begin{array}{l} m(\sphericalangle BAE)=m(\sphericalangle EBA)=45^\circ \Rightarrow \sphericalangle BAE \equiv \sphericalangle EBA \Rightarrow \Delta EBA \textit{ este isoscel de bază } [AB] \\ P \textit{ mijlocul laturii } [AB] \Rightarrow [EP] \textit{ este mediană în } \Delta EBA \end{array}\right\} \Rightarrow EP \textit{ este înălțime în} \Delta EBA \Rightarrow$$

$$EP \perp AB \Rightarrow m(\sphericalangle APE)=90^\circ \Rightarrow \Delta APE \textit{ este dreptunghic în } P \Rightarrow tg\, APE = \frac{EP}{AP} \Leftrightarrow tg\,45^\circ = \frac{EP}{18\sqrt{2}\,m} \Leftrightarrow 1 = \frac{EP}{18\sqrt{2}\,m} \Rightarrow EP = 18\sqrt{2}\,m.$$

Varianta 2: Calculăm lungimile catetelor triunghiului *EAB*

$$m(\sphericalangle BAE)=m(\sphericalangle EBA)=45^\circ \Rightarrow \left.\begin{cases} \Delta EAB \textit{ dreptunghic în } E \\ \Delta EAB \textit{ este isoscel cu } [AE] \equiv [BE] \Rightarrow AE = BE \end{cases}\right\} \Rightarrow AE^2 + BE^2 = AM^2 \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Leftrightarrow 2AE^2 = (36\sqrt{2}\,m)^2 \Rightarrow AE^2 = (36m)^2 \\ AE > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow AE = 36m. \text{ Deci } AE = BE = 36m.$$

SAU: $\left.\begin{array}{l} \Delta EAB \textit{ dreptunghic în } E \\ AE = BE \end{array}\right\} \Rightarrow AB = AE\sqrt{2} \Leftrightarrow 36\sqrt{2}\,m = AE\sqrt{2} \Rightarrow AE = BE = 36m.$

Corespunzător celor două variante, aflăm aria triunghiului *EAB*, prin două metode, astfel:

$A_{\Delta EAB} = \dfrac{AB \cdot EP}{2} = \dfrac{36\sqrt{2} \cdot 18\sqrt{2}}{2} m^2 = 648m^2$ **RESPECTIV:** $A_{\Delta EAB} = \dfrac{AE \cdot BE}{2} = \dfrac{36 \cdot 36}{2} m^2 = 648m^2.$

2p

METODA a III-a pentru a calcula aria triunghiului *EAB*

$$A_{ABCD} = \frac{(AB+CD)\cdot DM}{2} = \frac{\left(36\sqrt{2}+12\sqrt{2}\right)\cdot 12\sqrt{2}}{2} m^2 = \frac{48\sqrt{2}\cdot 12\sqrt{2}}{2} m^2 = 576m^2.$$

$$CD \parallel AB \Rightarrow \Delta EDC \sim \Delta EAB \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{ED}{EA} = \dfrac{EC}{EB} = \dfrac{CD}{AB} = k,\ k \in \mathbb{R}_+,\ k \textit{ raport de asemănare.} \\ \dfrac{A_{\Delta EDC}}{A_{\Delta EAB}} = k^2. \end{cases} \qquad k = \frac{CD}{AB} = \frac{12\sqrt{2}\,m}{36\sqrt{2}\,m} = \frac{1}{3}.$$

Varianta 1: calculăm AE și BE

$$\left.\begin{array}{l} CD \parallel AB \\ \sphericalangle EDC \textit{ si } \sphericalangle EAB \textit{ sunt corespondente} \\ \textit{formate de dreptele } CD \textit{ si } AB \textit{ cu secanta } AE \end{array}\right\} \Leftrightarrow \sphericalangle EDC \equiv \sphericalangle EAB \Rightarrow m(\sphericalangle EDC) = m(\sphericalangle EAB) = 45^\circ \textit{ si analog } m(\sphericalangle ECD) = 45^\circ.$$

ΔEDC este dreptunghic isoscel. $\dfrac{ED}{EA} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{AD}{EA} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \dfrac{24m}{EA} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow EA = 36m = EB \Rightarrow A_{\Delta EAB} = \dfrac{AE\cdot BE}{2} = \dfrac{36\cdot 36}{2} m^2 = 648m^2.$

Varianta 2: continuăm cu $\dfrac{A_{\Delta CMB}}{A_{\Delta EAB}} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9} \Leftrightarrow \dfrac{288m^2}{A_{\Delta EAB}} = \dfrac{4}{9} \Rightarrow A_{\Delta EAB} = \dfrac{288m^2 \cdot 9}{4} = 648m^2.$

$$\frac{A_{\Delta EDC}}{A_{\Delta EAB}} = k^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{A_{ABCD}}{A_{\Delta EAB}} = \frac{8}{9} \Leftrightarrow \frac{576m^2}{A_{\Delta EAB}} = \frac{8}{9} \Rightarrow A_{\Delta EAB} = \frac{576m^2 \cdot 9}{8} = 648\ m^2.$$

METODA a IV-a pentru a calcula aria triunghiului *EAB*

Dacă am demonstrat că $AMCD$ *este paralelogram* $\Rightarrow \begin{cases} CM = AD = 24m \\ CM \parallel AD \end{cases}$ și că ΔCMB este dreptunghic în $C \Rightarrow$

$$\Rightarrow A_{\Delta CMB} = \frac{CM \cdot CB}{2} = \frac{24\cdot 24}{2} m^2 = 288m^2.$$

$$CM \parallel AD \Leftrightarrow CM \parallel AE \Rightarrow \Delta CMB \sim \Delta EAB \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{CM}{EA} = \dfrac{CB}{EB} = \dfrac{MB}{AB} = k,\ k \in \mathbb{R}_+. \\ \dfrac{A_{\Delta CMB}}{A_{\Delta EAB}} = k^2. \end{cases} \qquad \frac{MB}{AB} = \frac{24\sqrt{2}\ m}{36\sqrt{2}\ m} = \frac{2}{3} = k.$$

Varianta 1: calculăm $AE = BE = 36m$ și atunci $A_{\Delta EAB} = \dfrac{AE\cdot BE}{2} = \dfrac{36\cdot 36}{2} m^2 = 648m^2.$

Varianta 2: continuăm cu $\dfrac{A_{\Delta CMB}}{A_{\Delta EAB}} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9} \Leftrightarrow \dfrac{288m^2}{A_{\Delta EAB}} = \dfrac{4}{9} \Rightarrow A_{\Delta EAB} = \dfrac{288m^2 \cdot 9}{4} = 648m^2.$

c) **Metoda I: unicitatea perpendicularei într-un punct pe o dreaptă**

$$\left.\begin{array}{l} \Delta EAB \textit{ este isoscel de bază } [AB] \\ P \textit{ mijlocul laturii } [AB] \Rightarrow [EP] \textit{ este mediană în } \Delta EAB \end{array}\right\} \Rightarrow EP \textit{ este înălțime în} \Delta EAB \Rightarrow EP \perp AB.$$

2p

$$\left.\begin{array}{l} Din\ (1) \Rightarrow [AD] \equiv [BC] \\ Din\ (1) \Rightarrow [BD] \equiv [AC] \\ [AB] \equiv [AB]\ (latură\ comună) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABD \equiv \Delta BAC \Rightarrow \sphericalangle DBA \equiv \sphericalangle CAB \Leftrightarrow \sphericalangle OBA \equiv \sphericalangle OAB \Rightarrow \Delta OAB\ e\ isoscel\ de\ bază\ [AB].$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta OAB\ e\ isoscel\ de\ bază\ [AB] \\ [OP]\ este\ mediană \end{array}\right\} \Rightarrow OP\ este\ \text{înălțime în}\ \Delta OAB \Rightarrow OP \perp AB.$$

$$\left.\begin{array}{l} P \in AB \\ EP \perp AB \\ OP \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow dreptele\ EP\ si\ OP\ coincid \Rightarrow \text{punctele } P, O \text{ și } E \text{ sunt coliniare.}$$

3p

Metoda a II-a: unicitatea mediatoarei unui segment, bazându-ne pe definiția acesteia

$$\left.\begin{array}{l} \Delta EAB\ este\ isoscel\ de\ bază\ [AB] \\ P\ mijlocul\ laturii\ [AB] \Rightarrow [EP]\ este\ mediană\ în\ \Delta EAB \end{array}\right\} \Rightarrow EP \text{ este mediatoare în } \Delta EAB \Leftrightarrow EP \text{ este mediatoarea segmentului [AB].}$$

$$\left.\begin{array}{l} Din\ (1) \Rightarrow [AD] \equiv [BC] \\ Din\ (1) \Rightarrow [BD] \equiv [AC] \\ [AB] \equiv [AB]\ (latură\ comună) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABD \equiv \Delta BAC \Rightarrow \sphericalangle DBA \equiv \sphericalangle CAB \Leftrightarrow \sphericalangle OBA \equiv \sphericalangle OAB \Rightarrow \Delta OAB\ e\ isoscel\ de\ bază\ [AB].$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta OAB\ e\ isoscel\ de\ bază\ [AB] \\ [OP]\ este\ mediană \end{array}\right\} \Rightarrow OP\ este \text{ mediatoare în } \Delta OAB \Leftrightarrow OP \text{ mediatoarea segmentului [AB].}$$

$$\left.\begin{array}{l} EP\ este\ mediatoarea\ segmentului \left[AB\right] \\ OP\ este\ mediatoarea\ segmentului \left[AB\right] \end{array}\right\} \Rightarrow dreptele\ EP\ si\ OP\ coincid \Rightarrow \text{punctele } P, O \text{ și } E \text{ sunt coliniare.}$$

Metoda a III-a: unicitatea mediatoarei unui segment, bazându-ne pe proprietatea că orice punct situat pe mediatoarea unui segment este egal depărtat de capetele segmentului și reciproc

$$\left.\begin{array}{l} \Delta EAB\ este\ isoscel\ de\ bază\ [AB] \Rightarrow [EA] \equiv [EB] \Rightarrow EA = EB \Rightarrow d(E,A) = d(E,B) \\ \Delta OAB\ este\ isoscel\ de\ bază\ [AB] \Rightarrow [OA] \equiv [OB] \Rightarrow OA = OB \Rightarrow d(O,A) = d(O,B) \end{array}\right\} \Rightarrow EO \text{ este mediatoarea segmentului [AB].}$$

$$\left.\begin{array}{l} EO\ este\ mediatoarea\ segmentului \left[AB\right] \\ P\ este\ mijlocul\ segmentului \left[AB\right] \Rightarrow PA = PB \Rightarrow d(P,A) = d(P,B) \end{array}\right\} \Rightarrow P \in EO \Rightarrow E, O, P \text{ sunt coliniare.}$$

Metoda a IV-a: unicitatea bisectoarei unui unghi

$$\left.\begin{array}{l} \Delta EAB\ este\ isoscel\ de\ bază\ [AB] \\ P\ mijlocul\ laturii\ [AB] \Rightarrow [EP]\ este\ mediană\ în\ \Delta EAB \end{array}\right\} \Rightarrow \left[EP \text{ este bisectoare în } \Delta EAB \Leftrightarrow \left[EP \text{ este bisect. } \sphericalangle - lui\ AEB.\right.\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} [EA] \equiv [EB] \\ [OA] \equiv [OB] \\ [EO] \equiv [EO]\ (latură\ comună) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta EOA \equiv \Delta EOB \Rightarrow \sphericalangle AEO \equiv \sphericalangle BEO \Rightarrow \left[EO \text{ este bisectoarea } \sphericalangle - lui\ AEB.\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \left[EO\ este\ bisectoarea\ \sphericalangle - lui\ AEB\right. \\ \left[EP\ este\ bisectoarea\ \sphericalangle - lui\ AEB\right. \end{array}\right\} \Rightarrow \text{semidreptele } \left[EO \text{ și } \left[EP \text{ coincid } \Rightarrow \text{punctele } P, O \text{ și } E \text{ sunt coliniare.}\right.\right.$$

Metoda a V-a: axioma paralelelor

$$\left.\begin{array}{l} ED = EC \Rightarrow d(E,D) = d(E,C) \\ DO = CO \Rightarrow d(O,D) = d(O,C) \end{array}\right\} \Rightarrow EO \text{ este mediatoarea segmentului [CD] } \Rightarrow EO \perp CD.$$

$$\left.\begin{array}{l} EO \perp CD \\ AB \parallel CD \end{array}\right\} \Rightarrow EO \perp AB. \qquad \left.\begin{array}{l} EO \perp AB \\ DM \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow EO \parallel DM. \qquad \left.\begin{array}{l} OP \perp AB \\ DM \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow OP \parallel DM.$$

$$\left.\begin{array}{l} O \notin DM \\ EO \parallel DM \\ OP \parallel DM \end{array}\right\} \Rightarrow dreptele\ EO\ si\ OP\ coincid \Rightarrow \overline{E,O,P}.$$

Metoda a VI-a: identitatea $EO + OP = EP \Leftrightarrow \overline{E,O,P}$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} OP \perp AB \\ DM \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow OP \parallel DM \Rightarrow \Delta BPO \sim \Delta BMD \Rightarrow \dfrac{BO}{BD} = \dfrac{OP}{DM} = \dfrac{BP}{BM} \\ \dfrac{BO}{OD} = \dfrac{3}{1} \Rightarrow \dfrac{BO}{OD} = \dfrac{3}{4}\ sau\ \dfrac{BP}{BM} = \dfrac{18\sqrt{2}\,m}{24\sqrt{2}\,m} = \dfrac{3}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{OP}{DM} = \frac{3}{4} \Rightarrow OP = \frac{DM \cdot 3}{4} = \frac{12\sqrt{2}m \cdot 3}{4} = 9\sqrt{2}m.$$

$$\text{Fie} \left.\begin{array}{l} OP \cap DC = \{I\} \\ \left.\begin{array}{l} OP \perp AB \\ AB \parallel CD \end{array}\right\} \Rightarrow OP \perp CD \end{array}\right\} \Rightarrow IP \perp CD. \qquad \left.\begin{array}{l} IP \perp CD \\ IP \perp AB \\ AB \parallel CD \end{array}\right\} \Rightarrow d(AB,CD) = IP = DM = 12\sqrt{2}\,m = OP + PI.$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\Delta BOA \sim \Delta DOC \\ \Delta BOA \text{ isoscel de bază } [AB]\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta DOC \text{ isoscel de bază } [CD] \\ OI \perp CD \Rightarrow OI \text{ este înălțime în } \Delta DOC\end{array}\right\} \Rightarrow [OI] \text{ este mediană în } \Delta DOC \Rightarrow I \text{ este mijlocul } [CD] \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow [EI] \text{ este mediană în } \Delta EDC \\ \Delta EDC \text{ dreptunghic în } E\end{array}\right\} \Rightarrow EI = \frac{CD}{2} = \frac{12\sqrt{2}m}{2} = 6\sqrt{2}\,m; \quad \left.\begin{array}{l}\Delta EAB \text{ este isoscel de bază } [AB] \\ [EP] \text{ este mediană în } \Delta EAB\end{array}\right\} \Rightarrow EP = \frac{AB}{2} = \frac{36\sqrt{2}}{2}m = 18\sqrt{2}\,m.$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}EP = 18\sqrt{2}\,m \\ PI = 12\sqrt{2}\,m \\ EI = 6\sqrt{2}\,m\end{array}\right\} \Rightarrow EP = EI + PI \Rightarrow \overline{E, I, P} \\ O \in PI\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{E, I, O, P}.$$

Observații:

1. Am obținut un rezultat cunoscut de „ *prietenii geometriei*”: ***într-un trapez mijloacele bazelor, punctul de intersecție al diagonalelor și punctul de intersecție al dreptelor ce includ laturile neparalelele sunt patru puncte coliniare.***
2. Coliniaritatea punctelor E, O, I se poate demonstra și cu *reciproca teoremei unghiurilor opuse la vârf.*

Metoda a VII-a: reciproca teoremei lui *Ceva*

Vom aplica mai întâi *Teorema Lui Thales* în ΔEAB: $CD \parallel AB \Rightarrow \frac{ED}{AD} = \frac{EC}{BC} \quad \Big|:\frac{EC}{BC} \Rightarrow \quad \frac{ED}{AD}\cdot\frac{BC}{EC} = 1.$

P este mijlocul laturii $[AB] \Rightarrow AP = PB \Rightarrow \frac{AP}{PB} = 1.$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{ED}{AD}\cdot\frac{BC}{EC} = 1 \\ \frac{AP}{PB} = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{ED}{AD}\cdot\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BC}{EC} = 1 \Rightarrow BD \cap EP \cap AC = \{O\} \Rightarrow \overline{E, O, P}.$$

Observație: $\overline{E,O,P}$ înseamnă că punctele E,O,P sunt coliniare, în această ordine!

Metoda a VIII-a: reciproca teoremei lui *Menelaos*

Calculăm cu una din variantele de la subpunctul ***b)*** $\frac{DE}{EA} = \frac{1}{3}$ și $\frac{AP}{PB} = 1.$ Apoi:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}CD \parallel AB \\ AC \cap BD = \{O\}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta BOA \sim \Delta DOC \Rightarrow \frac{BO}{OD} = \frac{AO}{OC} = \frac{AB}{CD} \\ \frac{AB}{CD} = \frac{36\sqrt{2}\,m}{12\sqrt{2}\,m} = \frac{3}{1}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{BO}{OD} = \frac{3}{1}.$$

În $\Delta DAB, E \in AD, P \in AB, O \in BD,$ astfel încât $\frac{DE}{EA}\cdot\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BO}{OD} = \frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{3}{1} = 1 \Rightarrow \overline{E, O, P}.$

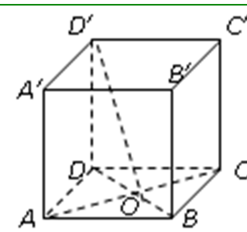
2. *a)*

Din ipoteză $ABCDA'B'C'D'$ este prismă dreaptă (1)

cu baza pătratul $ABCD$ și $AC \cap BD = \{O\}$ (2)

(ceea ce înseamnă că $ABCDA'B'C'D'$ este prismă patrulateră regulată!)

Din (1) $\Rightarrow V_{ABCDA'B'C'D'} = A_b \cdot h = AB^2 \cdot AA' =$ — **2p**



$= (4cm)^2 \cdot 2\sqrt{2}\ cm = 32\sqrt{2}\ cm^3$ — **3p**

b)

Din (2) $\Rightarrow BD = l\sqrt{2} = 4\sqrt{2}\,cm \Rightarrow DO = \frac{BD}{2} = 2\sqrt{2}\,cm.$ — **2p**

$$\left.\begin{array}{l}Din\ (1) \Rightarrow D'D \perp (ABC) \\ DO \subset (ABC)\end{array}\right\} \Rightarrow D'D \perp DO \Rightarrow m(\sphericalangle D'DO) = 90^\circ \Rightarrow \Delta D'DO \text{ este dreptunghic în } D \Rightarrow D'O^2 = D'D^2 + DO^2 =$$

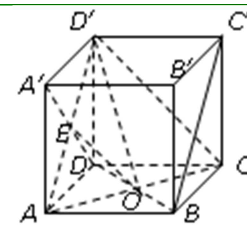
$= (2\sqrt{2}\,cm)^2 + (2\sqrt{2}\,cm)^2 = 8cm^2 + 8cm^2 = 16cm^2.$ $\quad \left.\begin{array}{l}D'O^2 = 16cm^2 \\ D'O > 0\end{array}\right\} \Rightarrow D'O = 4cm.$ — **3p**

c)

Metoda I

$$\left.\begin{array}{l}Din\ (1) \Rightarrow AB \parallel D'C' \Rightarrow A, B, C', D' \text{ sunt coplanare} \\ Din\ (1) \Rightarrow [AB] \equiv [D'C'] \\ AB \parallel D'C'\end{array}\right\} \Rightarrow ABC'D' \text{ este paralelogram } \Rightarrow BC' \parallel AD'.$$ — **1p**

$BC' \parallel AD' \Rightarrow m[\sphericalangle(BC', EO)] = m[\sphericalangle(\sphericalangle AD', EO)] = m(\sphericalangle AEO).$



$\left.\begin{array}{l} Din\ (1) \Rightarrow D'D \perp (ABC) \\ AD \subset (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow D'D \perp DA \Rightarrow m(\sphericalangle D'DA) = 90^\circ \Rightarrow \Delta D'DA$ este dreptunghic în $D \Rightarrow D'A^2 = D'D^2 + AD^2 =$

$= (2\sqrt{2}\,cm)^2 + (4\,cm)^2 = 8\,cm^2 + 16\,cm^2 = 24\,cm^2.$ $\quad \left.\begin{array}{l} D'A^2 = 24\,cm^2 \\ D'A > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow D'A = 2\sqrt{6}\,cm.$

Variante de a demonstra că $\Delta D'OA$ este dreptunghic în O

Varianta 1

$\left.\begin{array}{l} D'D \perp (ABC) \\ Din\ (2) \Rightarrow DO \perp AC \\ DO \subset (ABC) \\ AC \subset (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow D'O \perp AC \Rightarrow m(\sphericalangle D'OA) = 90^\circ \Rightarrow \Delta D'OA$ este dreptunghic în O.

2p

Varianta 2

$\left.\begin{array}{l} Din\ (1)\ si\ (2) \Rightarrow D'A = D'C \Rightarrow \Delta D'AC\ este\ isoscel\ de\ bază\ [AC] \\ Din\ (1) \Rightarrow O\ este\ mijlocul\ diagonalei\ [AC] \Rightarrow [D'O]\ este\ mediană\ în\ \Delta D'AC \end{array}\right\} \Rightarrow D'O\ este$ înălțime $în\ \Delta D'AC \Rightarrow D'O \perp AC \Rightarrow$

$\Rightarrow m(\sphericalangle D'OA) = 90^\circ \Rightarrow \Delta D'OA$ este dreptunghic în O.

Varianta 3

$\left.\begin{array}{l} D'D \perp (ABC) \\ AO \subset (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow D'D \perp AO \Rightarrow AO \perp D'D.$ Din (2) $\Rightarrow AO \perp BD.$ $\left.\begin{array}{l} AO \perp D'D \\ AO \perp BD \\ D'D \cap BD = \{O\} \end{array}\right\} \Rightarrow AO \perp (D'BD).$

$\left.\begin{array}{l} AO \perp (D'BD) \\ D'O \subset (D'BD) \end{array}\right\} \Rightarrow AO \perp D'O \Rightarrow m(\sphericalangle D'OA) = 90^\circ \Rightarrow \Delta D'OA$ este dreptunghic în O.

Varianta 4

$\left.\begin{array}{l} D'O = 4\,cm \Rightarrow D'O^2 = 16\,cm^2 \\ AO = 2\sqrt{2}\,cm \Rightarrow AO^2 = 8\,cm^2 \\ D'A = 2\sqrt{6}\,cm \Rightarrow D'A^2 = 24\,cm^2 \end{array}\right\} \Rightarrow D'A^2 = D'O^2 + AO^2 \Rightarrow \Delta D'OA$ este dreptunghic în O.

Indiferent de varianta aleasă, putem continua astfel:

$\left.\begin{array}{l} Fie\ OF \perp D'A,\ cu\ F \in D'A \Rightarrow OF\ este\ înălțime\ în\ \Delta D'OA \\ \Delta D'OA\ dreptunghic\ în\ O \end{array}\right\} \Rightarrow OF = \dfrac{D'O \cdot AO}{D'A} = \dfrac{4\,cm \cdot 2\sqrt{2}\,cm}{2\sqrt{6}\,cm} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}\,cm.$

$\left.\begin{array}{l} E\ este\ mijlocul\ [D'A] \\ O\ este\ mijlocul\ [AC] \end{array}\right\} \Rightarrow [EO]\ este\ linie\ mijlocie\ în\ \Delta D'AC \Rightarrow EO = \dfrac{D'C}{2} = \dfrac{2\sqrt{6}}{2}\,cm = \sqrt{6}\,cm.$

$\left.\begin{array}{l} \Delta D'AC\ este\ neisoscel \\ OF \perp D'A \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta EOF$ este dreptunghic în $F \Rightarrow \sin\ AEO = \dfrac{OF}{OE} = \dfrac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{6}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{6}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}.$

2p

Metoda a II-a

$\left.\begin{array}{l} Din\ (1) \Rightarrow AB \parallel D'C' \Rightarrow A, B, C', D'\ sunt\ coplanare \\ Din\ (1) \Rightarrow [AB] \equiv [D'C'] \\ AB \parallel D'C' \end{array}\right\} \Rightarrow ABC'D'$ este paralelogram $\Rightarrow BC' \parallel AD'.$

$[EO]\ este\ linie\ mijlocie\ în\ \Delta D'AC \Rightarrow EO \parallel D'C.$

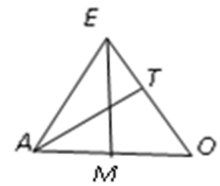
$\left.\begin{array}{l} BC'\ si\ EO\ necoplanare \\ D' \notin BC'\ si\ D' \notin EO \\ BC' \parallel AD' \\ EO \parallel D'C \end{array}\right\} \Rightarrow m[\sphericalangle(BC', EO)] = m[\sphericalangle(AD', D'C)] = m(\sphericalangle AD'C).$

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{A}_{\Delta D'AC} = \dfrac{AC \cdot D'O}{2} = \dfrac{4\sqrt{2} \cdot 4}{2} cm^2 = 8\sqrt{2}\, cm^2 \\ \mathcal{A}_{\Delta D'AC} = \dfrac{D'A \cdot D'C \cdot \sin\, AD'C}{2} = \dfrac{2\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{6} \cdot \sin\, AD'C}{2} cm^2 = 12 \cdot \sin\, AD'C\, cm^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 12 \cdot \sin\, AD'C = 8\sqrt{2} \Rightarrow \sin\, AD'C = \frac{8\sqrt{2}}{12} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Metoda a III-a

Ca la *metoda I* arătăm că $BC' \parallel AD' \Rightarrow m[\sphericalangle(BC', EO)] = m[\sphericalangle(\sphericalangle AD', EO)] = m(\sphericalangle AEO)$.

Calculăm $\left.\begin{array}{l} AE = \sqrt{6}\, cm \Rightarrow AE^2 = 6 cm^2 \\ EO = \sqrt{6}\, cm \Rightarrow EO^2 = 6 cm^2 \\ AO = 2\sqrt{2}\, cm \Rightarrow AO^2 = 8 cm^2 \end{array}\right\} \Rightarrow AO^2 < AE^2 + EO^2 \Rightarrow \Delta AEO$ este ascuțitunghic.



Varianta 1

$$Fie\ M\ mijlocul\ laturii\ [AO] \Rightarrow \begin{cases} AM = MO = \dfrac{AO}{2} = \dfrac{2\sqrt{2}\, cm}{2} = \sqrt{2}\, cm \\ [EM]\ este\ maediană\ în\ \Delta EAO \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} AE = EO \Rightarrow \Delta EAO\ este\ isoscel\ de\ bază\ [AO] \\ [EM]\ este\ maediană\ în\ \Delta EAO \end{array}\right\} \Rightarrow EM\ este\ înălțime\ în\ \Delta EAO \Rightarrow EM \perp AO \Rightarrow \Delta EMA\ este\ dreptunghic\ în\ M \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow EM^2 = AE^2 - EA^2 = (\sqrt{6}\, cm)^2 - (\sqrt{2}\, cm)^2 = 4\ cm^2 \\ EM > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow EM = 2 cm.$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{A}_{\Delta EAO} = \dfrac{AO \cdot EM}{2} = \dfrac{2\sqrt{2} \cdot 2}{2} cm^2 = 2\sqrt{2}\, cm^2 \\ \mathcal{A}_{\Delta EAO} = \dfrac{EA \cdot EO \cdot \sin AEO}{2} = \dfrac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} \cdot \sin AEO}{2} cm^2 = 3 \sin AEO\, cm^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 3 \sin AEO\, cm^2 = 2\sqrt{2}\, cm^2 \Rightarrow \sin AEO = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Observație: *Aria triunghiului EAO se putea calcula și cu formula lui Heron.*

Varianta 2

Fie $AT \perp EO$, *cu* $T \in (EO)$ și $TE = x \Rightarrow TO = (\sqrt{6} - x) cm$, *unde* $0 < x < \sqrt{6}$.

$$AT \perp EO \Rightarrow \left.\begin{cases} \Delta ATE\ este\ dr.\ în\ T \Rightarrow AT^2 = AE^2 - ET^2 = (\sqrt{6}\, cm)^2 - x^2 cm^2 = (6 - x^2) cm^2 \\ \Delta ATO\ este\ dr.\ în\ T \Rightarrow AT^2 = AO^2 - OT^2 = (2\sqrt{2}\, cm)^2 - (\sqrt{6} - x)^2 cm^2 = \left[8 - (6 - 2\sqrt{6}x + x^2 = 2\sqrt{6}x - x^2 + 2\right] cm^2 \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{6}x - x^2 + 2 = 6 - x^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{6}x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Atunci: $\left.\begin{array}{l} AT^2 = \left[6 - \left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^2\right] cm^2 = \left(6 - \dfrac{6}{9}\right) cm^2 = \dfrac{48}{9} cm^2 \\ AT > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow AT = \dfrac{4\sqrt{3}}{3} cm.$

ΔATE este dreptunghic în T $\Rightarrow \sin AEO = \dfrac{AT}{AE} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{6}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}.$

Metoda a IV-a

Ca la *metoda I* arătăm că $BC' \parallel AD' \Rightarrow m[\sphericalangle(BC', EO)] = m[\sphericalangle(\sphericalangle AD', EO)] = m(\sphericalangle AEO)$. În ΔAEO:

$$AO^2 = AE^2 + EO^2 - 2AE \cdot EO \cdot \cos\, AEO \Leftrightarrow \left(2\sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt{6}\right)^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2 - 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} \cdot \cos\, AEO \Leftrightarrow 8 = 12 - 12 \cdot \cos\, AEO \Rightarrow \cos\, AEO = \frac{1}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sin^2 AEO + \cos^2 AEO = 1 \Leftrightarrow \sin^2 AEO + \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 AEO = \dfrac{8}{9} \\ \sin AEO > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sin AEO = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$