Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 8

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right):\left(1-\frac{1}{12}\right)=1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4$. Arătați că $f(-2)+f(2)=4f(0)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_8\left(x^2-27\right)=\log_8(x-3)^2$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\{10,11,12,13,14,15,16,17,18,19\}$, acesta să fie număr par.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,3)$ și $B(8,3)$. Determinați coordonatele punctului C, știind că punctul B este mijlocul segmentului AC.

5p **6**. Arătați că $\cos^2 30°+\sin^2 60°-2\cos 30°\cdot\sin 60°=0$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $M=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}a&1\\3&2\end{pmatrix}$ unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det M=3$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $A(a)\cdot A(a)=4A(a)-I_2$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\det\left(aA(a)+M\right)=0$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-4X^2+mX+2$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(2)=2m-6$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr real m, numărul $E=x_1^2x_2x_3+x_1x_2^2x_3+x_1x_2x_3^2$ este întreg, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Pentru $m=3$, determinați rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=7x^3-5x^2+x+1$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=(3x-1)(7x-1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x f'(x)}{f(x)}$.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)\le\frac{52}{49}$, pentru orice $x\in\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2+8x-2, & x\in(-\infty,0]\\ x-2, & x\in(0,+\infty)\end{cases}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 f(x)\,dx=-\frac{1}{2}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=-1$ și $x=0$ are aria egală cu $\frac{17}{3}$.

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right):\left(1-\frac{1}{12}\right)=\frac{12-4+3}{12}:\frac{11}{12}=$	**3p**
	$=\frac{11}{12}\cdot\frac{12}{11}=1$	**2p**
2.	$f(-2)+f(2)=8+8=$	**2p**
	$=16=4\cdot 4=4f(0)$	**3p**
3.	$x^2-27=(x-3)^2\Rightarrow 6x-36=0$	**3p**
	$x=6$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea M are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea M sunt 5 numere pare, deci sunt 5 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$	**1p**
5.	$8=\frac{4+x_C}{2}\Rightarrow x_C=12$	**3p**
	$3=\frac{3+y_C}{2}\Rightarrow y_C=3$	**2p**
6.	$\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$	**2p**
	$\cos^2 30^\circ+\sin^2 60^\circ-2\cos 30^\circ\cdot\sin 60^\circ=(\cos 30^\circ-\sin 60^\circ)^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=0$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det M=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2\cdot 2-1\cdot 1=$	**3p**
	$=4-1=3$	**2p**
b)	$A(a)\cdot A(a)=\begin{pmatrix}a^2+3 & a+2\\ 3a+6 & 7\end{pmatrix}$	**2p**
	$4A(a)-I_2=\begin{pmatrix}4a-1 & 4\\ 12 & 7\end{pmatrix}$, deci $\begin{pmatrix}a^2+3 & a+2\\ 3a+6 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4a-1 & 4\\ 12 & 7\end{pmatrix}$, de unde obținem $a=2$	**3p**
c)	$aA(a)+M=\begin{pmatrix}a^2+2 & a+1\\ 3a+1 & 2a+2\end{pmatrix}\Rightarrow\det(aA(a)+M)=(a+1)(2a^2-3a+3)$	**3p**
	Cum $2a^2-3a+3\neq 0$, pentru orice număr real a, obținem $a=-1$	**2p**

2.a)	$f(2)=2^3-4\cdot 2^2+m\cdot 2+2=$ $=8-16+2m+2=2m-6$, pentru orice număr real m	**3p** **2p**
b)	$x_1+x_2+x_3=4$, $x_1x_2x_3=-2$ Pentru orice număr real m, $E=x_1x_2x_3\left(x_1+x_2+x_3\right)=-8$, care este număr întreg	**2p** **3p**
c)	$f=X^3-4X^2+3X+2=(X-2)\left(X^2-2X-1\right)$ $x_1=1-\sqrt{2}$, $x_2=2$, $x_3=1+\sqrt{2}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=7\cdot 3x^2-5\cdot 2x+1=$ $=21x^2-10x+1=(3x-1)(7x-1)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p** **3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x f'(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x(3x-1)(7x-1)}{7x^3-5x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(3-\frac{1}{x}\right)\left(7-\frac{1}{x}\right)}{x^3\left(7-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}=$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(3-\frac{1}{x}\right)\left(7-\frac{1}{x}\right)}{7-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=3$	**2p** **3p**
c)	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in\left(-\infty,\frac{1}{7}\right]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $\left(-\infty,\frac{1}{7}\right]$ și $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in\left[\frac{1}{7},\frac{1}{3}\right]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $\left[\frac{1}{7},\frac{1}{3}\right]$ Cum $f(x)\leq f\left(\frac{1}{7}\right)$, pentru orice $x\in\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]$ și $f\left(\frac{1}{7}\right)=\frac{52}{49}$, obținem $f(x)\leq\frac{52}{49}$, pentru orice $x\in\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]$	**2p** **3p**
2.a)	$\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2(x-2)dx=\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big\|_1^2=$ $=(2-4)-\left(\frac{1}{2}-2\right)=-\frac{1}{2}$	**3p** **2p**
b)	Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\left(x^2+8x-2\right)=-2$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}(x-2)=-2$ și $f(0)=-2$, obținem $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$, deci funcția f este continuă în $x=0$ Cum funcția f este continuă pe $(-\infty,0)$ și pe $(0,+\infty)$, obținem că f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$	**3p** **2p**
c)	$\mathcal{A}=\int_{-1}^0\left\|f(x)\right\|dx=\int_{-1}^0\left\|x^2+8x-2\right\|dx=\int_{-1}^0\left(-x^2-8x+2\right)dx=$ $=\left(-\frac{x^3}{3}-\frac{8x^2}{2}+2x\right)\Big\|_{-1}^0=\frac{17}{3}$	**2p** **3p**