ISJ PRAHOVA
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
24.I.2009
CLASA a V-a

1.Demonstrați că suma dintre $\overline{abcde}$ și $\overline{edcba}$ are cel puțin o cifră pară.

2. Suma a patru numere naturale este 626. Împărțindu-le prin acelaşi număr natural nenul se obțin câturile numere naturale consecutive şi resturile 1,2,3 respectiv 4. Aflați numerele. Câte soluții are problema ?

3. Arătați că există o infinitate de numere naturale pentru care jumătatea şi dublul lor sunt numere naturale pătrate perfecte, iar sfertul lor este nunăr natural cub perfect. Care este cel mai mic număr natural cu această proprietate ?

4. În şcoala noastră jumătate dintre elevi sunt băieți. Jumătate dintre elevi sunt înscrişi la ciclul primar iar restul la ciclul gimnazial. Arătați că numărul de băieți de la gimnaziu este egal cu numărul de fete de la ciclul primar.

Notă: timp de lucru 3 ore;
Fiecare subiect se notează cu puncte de la 1 la 10.

ISJ PRAHOVA
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
24.I.2009
CLASA a VI-a

1. Aflați numerele $\overline{xy}$ şi $\overline{zt}$ ştiind că $\overline{xy}(\overline{zt}+1)=\overline{zt}+2010$.

2. Fie A=$\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2\}$

 a) Calculați $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$;
 b) Scrieți numărul 1 ca sumă a 12 elemente din mulțimea A
 c) Numărul 1 poate fi scris ca sumă de elemente din A, având numitorii numere prime ?

3. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*, m < n$ astfel încât $(m,n)=1$ şi fracția F=$\frac{4n-m}{3n+4m}$ este reductibilă.

 Prin ce număr se simplifică fracția F ?

4. Fie M_1 mijlocul segmentului [AB], M_2 mijlocul segmentului [AM_1], M_3 mijlocul segmentului [AM_2],..., M_n mijlocul segmentului [AM_{n-1}]. Dacă $AM_n=1$, calculați

 $S=AM_n+AM_{n-1}+...+AM_3+AM_2+AM_1$. Aflați n dacă S=127.

Notă: timp de lucru 3 ore;
Fiecare subiect se notează cu puncte de la 1 la 10.

ISJ PRAHOVA
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
24.I.2009
CLASA a VII-a

1. a) Verificați că: $(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})(1-\frac{1}{4^2}) \geq \frac{1}{2}$.

   b) Arătați că : $(1-\frac{1}{2^k})(1-\frac{1}{3^k})(1-\frac{1}{4^k})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{1}{2009^k}) \geq \frac{1}{2}$, pentru orice k≥2.

2. Numerele naturale nenule a şi b şi numărul real x verifică relația x= $\sqrt{a-\sqrt{b}}-\sqrt{\sqrt{a}+b}$.
   a) Arătați că $\sqrt{a}-\sqrt{b}=1$;
   b) Demonstrați că x este număr irațional.

3. În ΔABC, M$\in$(AB), F şi G$\in$(CM) astfel încât BM=3AM, CF=FG=GM iar AF∩BC={D}, AG∩BC{E}.
   a) Demonstrați că ΔAGF$\equiv$ΔEGM;
   b) Arătați că BE=6CD.

4. Fie ABCD un trapez dreptunghic cu AB||CD şi AB<CD, AC$\perp$BD şi m($\sphericalangle$BDC)=60^0.
   a) Demonstrați că CD=3AB;
   b) Fie O intersecția diagonalelor trapezului. Dacă P este simetricul lui D față de O şi S este mijlocul segmentului [AC], atunci dreapta PS împarte ΔBOC în două suprafețe de arii egale.

Notă: timp de lucru 3 ore;
Fiecare subiect se notează cu puncte de la 1 la 10.

ISJ PRAHOVA
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
24.I.2009
CLASA a VIII-a

1. Fie expresia $E(x)=x^4-x^3+x^2-3x+2$.
   a) Arătați că $E(x)\geq 0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$;
   b) Determinați $a\in\mathbb{Z}$ astfel încât E(a) să fie pătrat perfect.

2. Să se determine x,y,z numere întregi ştiind că $9x^2+25y^2+225z^2\leq 675$ şi $xy+3xz+5yz=75$.

3. Dreptunghiul ABCD şi ΔABC cu AE=13 cm, AB=14 cm, EB=15 cm şi BC=12 cm, sunt situate în plane diferite. Dacă H este ortocentrul ΔABE şi $EH\perp BC$, aflați distanța de la H la (EDC).

4. În cubul ABCDA'B'C'D' se consideră T un punct pe (AO) unde O este centrul feței BCC'B'. Aflați unghiul dintre dreptele D'B şi B'T.

Notă: timp de lucru 3 ore;
Fiecare subiect se notează cu puncte de la 1 la 10.