BAREM DE CORECTARE SI NOTARE

CLASA a VI-a

1. Determinaţi toate perechile (a,b) de numere naturale cu proprietatea că

$$2^{a+1}\cdot 5^{a}=(3b+1)(3b+2).$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

Soluţie. Se observă uşor că perechile $(a,b)=(0,0)$ şi $(a,b)=(1,1)$ verifică proprietatea dată. (1p)
Vom demonstra că acestea sunt singurele perechi care verifică condiţia enunţului.

Deoarece $3b+1$ şi $3b+2$ sunt consecutive, atunci sunt prime între ele; deci avem două posibilităţi: (i) $\begin{cases}2^{a+1}=3b+1\\ 5^{a}=3b+2\end{cases}$ sau (ii) $\begin{cases}2^{a+1}=3b+2\\ 5^{a}=3b+1\end{cases}$. (2p)

În primul caz avem $5^{a}-2^{a+1}=1$, cu soluţia $a=1$; nu putem avea mai multe soluţii deoarece $5^{a}>2^{a+1}+1$, pentru orice $a\geq 2$. De aici obţinem $b=1$. (2p)

În cel de al doilea caz avem $2^{a+1}-5^{a}=1$, imposibil deoarece $2^{a+1}<5^{a}+1$, pentru orice $n\geq 1$.

În concluzie, $(a,b)\in\{(0;0),(1;1)\}$. (2p)

2. Fie a,b,c,d numere naturale nenule astfel încât $\frac{a^{2019}}{b}=\frac{b^{2019}}{c}=\frac{c^{2019}}{d}=\frac{d^{2019}}{a}$.

Demonstraţi că numărul n=2$(a^{2019}+b^{2019}+c^{2019}+d^{2019})$ este cub perfect.

Nicolae Tomescu, Corabia

Soluţie:

Dacă $a>b\Rightarrow a^{2019}>b^{2019}\Rightarrow b>c\Rightarrow b^{2019}>c^{2019}\Rightarrow c>d\Rightarrow c^{2019}>d^{2019}\Rightarrow d>a\Rightarrow$

$a>b>c>d>a$ fals (3p)

Analog , dacă $a<b\Rightarrow a<b<c<d<a$ fals (2p)

Deci $a=b\Rightarrow a^{2019}=b^{2019}\Rightarrow b=c\Rightarrow b^{2019}=c^{2019}\Rightarrow c=d\Rightarrow a=b=c=d$ (1p)

n=2$(a^{2019}+b^{2019}+c^{2019}+d^{2019})$ = $2\cdot 4a^{2019}$ = $8a^{2019}=(2a^{673})^{3}$ este cub perfect. (1p)

3.Câte triunghiuri există cu lungimile laturilor exprimate prin numere naturale astfel încât latura cu lungimea cea mai mare este 11?

Lucian Tuţescu, Craiova

Soluţie:

Fie a,b,c$\in \mathbb{N}^*$ lungimile celor trei laturi astfel încât $a \leq b \leq c = 11$,atunci $6 \leq b \leq 11$ (2p)

Din teorema de existenţă a unui triunghi $c < a + b \Rightarrow c - b < a \leq b$ (2p)

Pentru b=11, avem $1 \leq a \leq 11$ deci a poate lua 11 valori (1p)

Cand b descreşte cu 1, atunci a descreşte cu 2 (1p)

Numarul cerut este: 11+9+7+5+3+1 =36 (1p)

4. Pe latura [BC] a triunghiului obtuztunghic isoscel ABC(AB=AC) se consideră punctul M astfel încât [BM]≡[AC], iar pe latura [AB] se consideră punctul N astfel încât [BN]≡[MC].

Dacă m($\sphericalangle$AMN) =40^o, aflaţi măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

Gazeta Matematică

Soluţie:

Δ BNM≡ Δ CMA(L.U.L.) $\Rightarrow$ [MN] ≡ [MA] $\Rightarrow$ Δ AMN este isoscel (2p)

Cum m($\sphericalangle$ AMN)=40^o, obţinem m($\sphericalangle$ BAM)=70^o (2p)

Din Δ ABM isoscel ,obţinem m($\sphericalangle$ ABC)= m($\sphericalangle$ ACB)= 40^o si m($\sphericalangle$ BAC)=100^0. (3p)