BAREM DE CORECTARE SI NOTARE

CLASA a V-a

1. Considerăm toate numerele naturale de 10 cifre , care se pot scrie în baza zece, numai cu cifrele 1 şi 2.
   a) Câte numere de acest fel există?
   b) Câte dintre acesestea sunt numere pare?
   c) Câte dintre cele pare sunt pătrate perfecte?
   d) Câte dintre acesestea au numai două cifre de 2?

Nicolae Tomescu, Corabia

Soluţie:

a) Din regula produsului avem : $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2}_{de\ 10\ ori} = 2^{10} = 1024$ numere (2p)
b) 1024 : 2 = 512 numere pare (2p)
c) Numărul format din ultimele două cifre ale unui număr par poate fi 12 sau 22.Din criteriul de divizibilitate cu 4 , numerele sunt atunci de forma 4k+2.Cum nu există pătrate perfecte de forma 4k+2 , atunci niciun număr par nu este pătrat perfect. (2p)
d) Avem: 9+8+7+...+3+2+1 = $\frac{5 \cdot 10}{2}$ = 45 numere (1p)

2. Determinaţi numărul natural $\overline{abc}$ care îndeplineşte condiţia: $\overline{abc} = a \cdot b^3 + 6$.

Gazeta Matematică

Soluţie:

Avem: 100a+10b+c = $a \cdot b^3 + 6$ (1p)
Dacă b≤4, atunci $ab^3+6 \leq 64a+6 < 100a+10b+c$ deci în acest caz nu avem soluţii. (2p)
Dacă b = 5, obţinem 100a+50+c = 125a+6 ⇒ c+44 = 25a ⇒ a = 2 şi c = 6 (1p)
Dacă b ≥6, atunci $ab^3+6 \geq 216a+6 = 100a+116a+6 > 100a+100 > 100a+\overline{bc} = \overline{abc}$,deci nici în acest caz nu avem soluţii. (2p)
Soluţia problemei este : $\overline{abc} = 256$ (1p)

3. Arătaţi că nu există numere naturale a, b, c, d pentru care a+b+c+d = 100 şi $a^2+b^2+c^2+d^2=$ = 2019

elev Denisa Drăghia,Craiova

Soluţie:

Presupunem prin absurd că există numere naturale a,b,c,d cu proprietatea din enunţ . (1p)

Adunând cele două relaţii obţinem: $a^2+b^2+c^2+d^2+a+b+c+d = 2119 \Rightarrow$
$a(a+1)+b(b+1)+c(c+1)+d(d+1) = 2119$. (3p)

Cum produsul a două numere naturale consecutive este un număr par , obţinem că membrul stâng este un număr par ,de unde 2119 este număr impar, contradicţie. (3p)

4. Arătaţi că există o infinitate de pătrate perfecte care se pot scrie ca sumă de trei cuburi perfecte şi o infinitate de cuburi perfecte care se pot scrie ca sumă de trei pătrate perfecte.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

Soluţie:

Pentru orice număr natural nenul n avem

$$\left(3^{3n+2}\right)^2 = 3^{6n+4} = 3^{6n+3}\cdot 3 = 3^{6n+3} + 3^{6n+3} + 3^{6n+3} = \left(3^{2n+1}\right)^3 + \left(3^{2n+1}\right)^3 + \left(3^{2n+1}\right)^3,$$

deci există o infinitate de pătrate perfecte care se pot scrie ca sumă de trei cuburi perfecte. (4p)

Pentru orice număr natural nenul n avem

$$\left(3^{2n+1}\right)^3 = 3^{6n+3} = 3^{6n+2}\cdot 3 = 3^{6n+2} + 3^{6n+2} + 3^{6n+2} = \left(3^{3n+1}\right)^2 + \left(3^{3n+1}\right)^2 + \left(3^{3n+1}\right)^2,$$

deci există o infinitate de cuburi perfecte care se pot scrie ca sumă de trei pătrate perfecte. (3p)