

**MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ȘI INOVĂRII**  
**INSPECTORATUL ȘCOLAR AL JUDEȚULUI CARAȘ-SEVERIN**

Strada Ateneului Nr.1, 320112 REȘIȚA-ROMANIA  
Tel: 0255/214238; Fax: 0255/216042

---

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**  
**FAZA LOCALĂ - 14.02.2009**

**Clasa a IX a**

1. Să se demonstreze că dacă  $x, y, z \in (0, \infty)$  și  $x \cdot y \cdot z = 1$ , atunci :

$$\frac{1}{x+y+\sqrt{z}} + \frac{1}{y+z+\sqrt{x}} + \frac{1}{z+x+\sqrt{y}} < \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Lucian Dragomir, Oțelu- Roșu

2. a) Să se arate că nu există numere reale  $x$  pentru care  $\left[\frac{x}{2}\right] = x^2 + 1$ .

- b) Să se determine numerele reale  $y$  pentru care  $\left[\frac{y}{2}\right] = y^2$ .

Lucian Dragomir, Oțelu- Roșu, articol RMCS 25/2008

3. Să se arate că numărul

$$a_n = 3^{n+1} + 2n + 1 \text{ este divizibil cu } 4, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}.$$

Marin Chirciu, Pitești, RMT 4/2008

4. Pentru orice triunghi  $ABC$  se notează  $AB = c, BC = a, CA = b$ , iar  $I$  este centrul cercului înscris, iar  $G$  este centrul de greutate.

Să se arate că:

a)  $\overrightarrow{GI} = \frac{1}{a+b+c} \cdot (a \cdot \overrightarrow{GA} + b \cdot \overrightarrow{GB} + c \cdot \overrightarrow{GC})$ ;

- b) dacă  $c = 3, b = 4, a = 5$ , atunci  $IG$  este paralelă cu  $AC$ .

Gabriel Popa, Iași, GM 3/2008

**NOTĂ:**

- TIMP DE LUCRU 3 ORE.
- TOATE SUBIECTELE SUNT OBLIGATORII.

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**  
**FAZA LOCALĂ - 14.02.2009**

**Clasa a X a**

1. Să se determine numerele naturale  $n$  pentru care există  $z \in \mathbb{C}$  cu  $|z| = 1$  și  $z^n + z + 1 = 0$ .

GM 4/2008

2. Să se determine  $x \in \mathbb{N}$  pentru care  $\frac{4^x + 4x + 1}{2^x + x} = 2^x - 1$ .

GM 2/2008

3. Să se determine funcțiile injective  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietatea că  $f(x)f(y) = xf(y) + yf(x) - f(xy)$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ .

Iacob Didraga, RMCS 23

4. Să se determine numerele naturale  $m$  și  $n$  pentru care egalitatea  $\sqrt[m]{x} \cdot \sqrt[n]{x^2} \cdot \sqrt[n]{x^3} \cdot \sqrt[m]{x} = x^2$  este adevărată pentru orice  $x > 0, x \neq 1$ .

RMCS ,enunț modificat puțin

**NOTĂ:**

- TIMP DE LUCRU 3 ORE.
- TOATE SUBIECTELE SUNT OBLIGATORII.

**MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ȘI INOVĂRII**  
**INSPECTORATUL ȘCOLAR AL JUDEȚULUI CARAȘ-SEVERIN**

Strada Ateneului Nr.1, 320112 REȘIȚA-ROMANIA  
Tel: 0255/214238; Fax: 0255/216042

---

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**  
**FAZA LOCALĂ - 14.02.2009**

Clasa a XI a

1. a) Să se dea un exemplu de matrice  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ,  $A \neq O_2$ ,  $A \neq I_2$ , pentru care există  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \geq 2$  astfel încât  $A^p = A$ ;  
b) Să se arate că dacă  $n, p \in \mathbb{N}$ ,  $n, p \geq 2$  și  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  astfel încât  $A^{p+1} = A$ , atunci  $\text{rang}(A) + \text{rang}(I_n - A^p) = n$ .

RMCS 24, articol

2. Un determinant  $D$  de ordinul 3 are elementele de pe diagonala principală egale cu  $\frac{1}{2}$ , iar suma elementelor de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană este egală cu 1. Să se arate că :  $D > 0$ .

\* \* \*

3. Fie  $x_1 \in (0,1)$  și șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  definit prin  $x_{n+1} = x_n^3 - x_n^2 + 1$ ,  $\forall n \geq 1$ . Să se arate că șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  este convergent și să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)$

\* \* \*

4. Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{3^x + 5^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$ .

GM 10/2007

**NOTĂ:**

- TIMP DE LUCRU 3 ORE.
- TOATE SUBIECTELE SUNT OBLIGATORII.

**MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ȘI INOVĂRII**  
**INSPECTORATUL ȘCOLAR AL JUDEȚULUI CARAȘ-SEVERIN**

Strada Ateneului Nr.1, 320112 REȘIȚA-ROMANIA  
Tel: 0255/214238; Fax: 0255/216042

---

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**  
**FAZA LOCALĂ - 14.02.2009**

Clasa a XII a

1. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  o funcție bijectivă. Să se studieze dacă există funcții  $g: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  care admit primitive pe  $\mathbb{R}$  și satisfac relația  $g \circ g = f$ .

RMCS 26

2. Dacă  $G$  este un grup multiplicativ în care, pentru orice  $x, y, z \in G$ , avem:

$$xy^2 = z^2x \Rightarrow y = z, \text{ să se arate că :}$$

a)  $x^2 \neq e, \forall x \in G \setminus \{e\}$  ;

b)  $G$  este abelian ;

c) Orice grup cu proprietățile a) și b) are proprietatea din enunț.

Prof. Marian Andronache, București, RMCS

3. Fie  $(G, \cdot)$  un grup cu proprietatea că  $x^2 = e, \forall x \in G$ . Să se arate că pentru orice funcție  $f: G \rightarrow G$  și orice  $a \in G, a \neq e$ , funcția  $g: G \rightarrow G, g(x) = f(x)f(ax)$  nu este injectivă.

\* \* \*

4. Să se determine  $\int \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} \cdot e^{\arctg x} dx, x \in \mathbb{R}.$

**NOTĂ:**

- TIMP DE LUCRU 30RE.
- TOATE SUBIECTELE SUNT OBLIGATORII.