

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN OLT  
LICEUL „ȘTEFAN DIACONESCU” POTCOAVA

Concursul de Matematică „MARINESCU–GHEMECI OCTAVIAN”  
Ediția a VIII-a, 11 mai 2019

Clasa a XI-a

1. Fie mulțimea  $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}^*) \mid \frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} \text{ și } \frac{a}{g} = \frac{b}{h} = \frac{c}{i} \right\}$ .

(a) Arătați că dacă  $A \in M$ ,  $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ , atunci  $A^2 = (a + e + i)A$ .

(b) Rezolvați în mulțimea  $M$  ecuația  $X^3 = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}$ .

2. Fie  $ABC$  un triunghi nedreptunghic,  $Q$  centrul cercului circumscris acestui triunghi și  $A_1$ ,  $B_1$  și  $C_1$  centrele de greutate ale triunghiurilor  $QBC$ ,  $QAC$ , respectiv  $QAB$ .

(a) Știind că, în sistemul cartezian de coordonate  $xOy$ , avem  $A(-1, 2)$ ,  $B(0, -1)$  și  $C(3, 2)$ , calculați coordonatele punctului  $Q$  și arătați că punctele  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  nu sunt coliniare.

(b) Demonstrați că punctul  $Q$  este centrul de greutate al triunghiului  $A_1B_1C_1$  dacă și numai dacă triunghiul  $ABC$  este echilateral.

3. Fie funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \sqrt[2019]{ax}, & \text{dacă } x \leq 1 \\ \frac{x^{2019} - 1}{x - 1}, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$ , unde  $a \in \mathbb{R}$ .

(a) Determinați  $a \in \mathbb{R}$  pentru care funcția  $f$  este continuă.

(b) Determinați  $a \in \mathbb{R}$  pentru care funcția  $f$  este injectivă.

(c) Determinați  $a \in \mathbb{R}$  pentru care funcția  $f$  este surjectivă.

4. Doi colegi de bancă, Dorel și Gigel, scriu în fiecare zi câte un număr. În prima zi Dorel a scris numărul 2, iar Ionel numărul 3. Începând cu ziua a doua, fiecare scrie suma dintre triplul numărului său din ziua precedentă și numărul celuilalt din ziua precedentă.

(a) Comparați numerele scrise de cei doi colegi în cea de-a șasea zi.

(b) În a câta zi numerele scrise de cei doi colegi sunt ambele mai mari decât zece milioane?

*Stelian-Corneliu Andronescu, Pitești, Costel Bălcău, Pitești și  
Leonard Mihai Giugiuc, Drobeta Turnu Severin*

**Notă:** Fiecare subiect este notat de la 0 la 7 puncte. Timp de lucru: 3 ore.