

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN OLT
LICEUL „ȘTEFAN DIACONESCU” POTCOAVA

Concursul de Matematică „MARINESCU–GHEMECI OCTAVIAN”
Ediția a VIII-a, 11 mai 2019

Clasa a XII-a

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} \widehat{3} & \widehat{4} \\ \widehat{0} & \widehat{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)$.
 - (a) Calculați A^{2019} .
 - (b) Rezolvați în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)$ ecuația $X^3 = A$.
2. Se consideră polinoamele $f = X^3 + X + 1$ și $g = X^3 + X^2 + 1$.
 - (a) Arătați că fiecare dintre polinoamele f și g au exact câte o rădăcină reală.
 - (b) Demonstrați că polinoamele f și g nu au rădăcini comune.
 - (c) Determinați numărul de valori reale pe care le poate lua expresia $E = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$, unde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile lui f iar $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile lui g .
3. Fie funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}, & \text{dacă } x > 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$.
 - (a) Demonstrați că funcția f admite primitive.
 - (b) Determinați primitiva F a funcției f pentru care axa Ox este tangentă în origine la graficul funcției F .
4. Doi prieteni, Dorel și Gigel, au fiecare câte o mașinuță teleghidată. Mașinuța lui Dorel este programată să se deplaseze în linie dreaptă cu viteza instantanee $v_1(x) = \sin^2(\pi x)$ m/s, iar mașinuța lui Gigel cu viteza instantanee $v_2(x) = \sin^2(2\pi x)$ m/s.
 - (a) Ce distanță a parcurs fiecare mașinuță după primele 20 de secunde?
 - (b) Cine câștigă o cursă de 10,8 metri?

Se cunoaște că dacă $S(x)$ este distanța parcursă de la momentul inițial $t = 0$ la momentul $t = x$ de un mobil având viteza instantanee $v(x)$, atunci $v(x) = S'(x)$. Cursa începe la momentul inițial $t = 0$ și traseul ales este în linie dreaptă.

*Stelian-Corneliu Andronescu, Pitești, Costel Bălcău, Pitești și
Leonard Mihai Giugiuc, Drobeta Turnu Severin*

Notă: Fiecare subiect este notat de la 0 la 7 puncte. Timp de lucru: 3 ore.