CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ "*SEVER-AUREL GROZE*"

Ediția a VII-a, Beclean, 10 – 12 mai 2019

BAREM CLASA a VI-a

1. Fie *A*={1,2,3,...,2019} și *B*={672,1008,1344,1680,2016}. Mulțimea *A* se scrie aleatoriu ca o reuniune de trei submulțimi, doua câte două disjuncte. Arătați că există $a, b, a \neq b$ din aceeași submulțime a lui *A* astfel încât $a + b \in B$.

G.M. 2/2019

Soluție*

Căutăm 4 numere *a*<*b*<*c*<*d* astfel încât suma oricăror două să aparțină mulțimii *B* ⇒

a+b=672; a+c=1008, a+d=b+c=1344, b+d=1680 și c+d=2016 **2p**

Rezolvând ultimele 3 ecuații, obținem *b*=504, *c*=840 și *d*=1176 ⇒ *a*=168 **2p**

Avem numerele 168,504,840 și 1176, toate aparținând mulțimii *A,* pe care le punem aleatoriu în 3 submulţimi. Cum sunt 4 numere şi 3 submulţimi, din principiul cutiei rezultă că există o submulţime care conţine cel puţin două numere. Dar suma oricăror două astfel de numere aparţine mulţimii *B.* **3p**

2. Fie ΔABC dreptunghic isoscel, $m(\sphericalangle A) = 90^o$, $(BD$ bisectoarea $\sphericalangle B, D \in (AC)$. Dacă $CE \perp BD, E \in BD,$ demonstrați că $BD = 2CE$.

Soluție*

Notăm $\{F\} = CE \cap AB \Rightarrow \Delta BCF$ este isoscel (BE este mediană și înălțime) $\Rightarrow 2CE = CF$ **3p**

$\sphericalangle ACF = \sphericalangle EBC = 22^o30' \Rightarrow \Delta ABD \equiv \Delta ACF\ (C.U.) \Rightarrow BD = CF \Rightarrow BD = 2CE$ **4p**

3. Să se arate că, dacă *a,b,c,d* sunt pătrate sau cuburi perfecte nenule distincte, atunci *abc+abd+acd+bcd+148 ≤ 2abcd.*

Soluție*

$abc + abd + acd + bcd + 148 \leq 2abcd \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{148}{abcd} \leq 2$ **2p**

Fracțiile au valori maxime când numitorii sunt cei mai mici posibili **2p**

Cele mai mici pătrate și cuburi perfecte nenule sunt 1,4,8 și 9 **1p**

Dar $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{148}{288}= 2$, deci $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{148}{abcd}\leq 2$ **2p**

Oricare altă metodă de rezolvare se punctează corespunzător. Problemele rezolvate prin încercări se punctează cu maximum 4 puncte.