CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ "*SEVER-AUREL GROZE*"

Ediția a VII-a, Beclean, 10 – 12 mai 2019

BAREM CLASA a V-a

1. a) Se pot împărți numerele 1,2,3,...,12 în grupe de câte trei numere fiecare, astfel încât în fiecare grupă suma a două dintre numere să fie cu 1 mai mare sau mai mică decât celălalt număr al grupei?
   b) Aceeași întrebare pentru numerele 1,2,3,...,18.

   G.M. 2/2019

   Soluție*

   a) Da, de exemplu (3,10,12), (4,6,11), (1,7,9) și (2,5,8) **2p**
   b) Presupunem prin absurd că se poate ⇒ putem împărți cele 18 numere în 6 grupe de câte 3 numere
   Suma numerelor din fiecare grupă este impară **2p**
   Cum avem 6 grupe ⇒ suma tututor celor 18 numere este pară **1p**
   Dar suma celor 18 numere este 1+2+3+....+18=18·19:2=171 – impară **1p**
   Contradicție ⇒presupunerea făcută este falsă ⇒ nu se poate **1p**

2. Fie numărul natural *A*=201920019200019..... ,având suma cifrelor egală cu 2019. Să se afle:
   a) Ultima cifră a numărului *A*
   b) Câte cifre are numărul *A.*

   Soluție*

   a) 2+1+9=12, iar 2019=12·168+3⇒ numărul conține 168 de grupe de cifre de forma $2\underbrace{00\ldots0}_{de\ k\ ori}19$ și se termină cu $2\underbrace{00\ldots0}_{de\ 169\ ori}1$⇒ultima cifră a lui *A* este 1 **4p**
   b) Numărul conține 169 de cifre de 2 și de 1, 168 de cifre de 9 **1p**
   și 1+2+....+169 de cifre de 0, adică 169·170:2=14365 **1p**
   În total, 14365+169·2+168=14871 de cifre **1p**

3. a) Să se arate că, oricare ar fi numărul natural *m*, există numerele naturale nenule *n*,*a*,*b și c* astfel încât $5^m+5^n=a^2+b^2+c^2$.
   b)Determinați numerele naturale *n* cu proprietatea că suma cifrelor lui 25^n este mai mică decât 15.

   Soluție*

   a) Dacă *m*=0, fie *a*=1, *n=1, b=1* și *c=2* **1p**

   Dacă *m* impar, fie $n=m-1=2k$, $a=5^k$, $b=5^k$ și $c=2\cdot5^k$ **1p**

   Dacă *m* par, fie $n=m-2=2k$, $a=5^k$, $b=3\cdot5^k$ și $c=4\cdot5^k$ **1p**

   b) 25^1=25, 2+5=7<15, 25^2=625, 6+2+5=13<15 ⇒ $n \in \{1,2\}$ **1p**

Pentru $n \geq 3$, observăm că ultimele trei cifre ale lui 25^n sunt întotdeauna 625

Pentru ca suma cifrelor lui 25^n să fie cel mult 14 ⇒ $25^n = 1\underbrace{00\ldots0}_{k\ ori}625$ **1p**

Pentru $k \geq 2$, avem $25^n = 10^{k+3} + 625 ⋮ 5^6$, dar $10^{k+3} ⋮ 5^5 \Rightarrow 625 ⋮ 5^5$ Fals! **1p**

Deci $k \in \{0,1\}$, dar nici 1625, nici 10625 nu sunt puteri ale lui 25. **1p**

***Oricare altă metodă de rezolvare se punctează corespunzător. Problemele rezolvate prin încercări se punctează cu maximum 4 puncte.**