BAREM CLASA a VIII-a

1. $Rezolvați\ ecuația\ \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(\{x\}+\sqrt{\{x\}^2+1}\right)=1, unde\ x \in \boldsymbol{R}.$

$Am\ notat\ cu\ \{x\}\ partea\ fracționară\ a\ numărului\ real\ x.$

G.M. 3/2019

Soluție*

Dacă $\{x\}=0 \Rightarrow x+\sqrt{x^2+1}=1 \Rightarrow x=0$ **1p**

Dacă $\{x\}>0 \Rightarrow \{x\}+\sqrt{\{x\}^2+1}>1 \Rightarrow\ x+\sqrt{x^2+1}<1$ **1p**

Cum $x \geq 0 \Rightarrow x+\sqrt{x^2+1} \geq 1 \Rightarrow x<0$ **1p**

$\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(\{x\}+\sqrt{\{x\}^2+1}\right)=1 \Rightarrow \{x\}+\sqrt{\{x\}^2+1}=|x|+\sqrt{x^2+1} \Rightarrow$ **2p**

$\{x\}=|x| \Rightarrow [x]=-1 \Rightarrow x+1=-x \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$ **2p**

2. *Să se arate că orice triunghi are două laturi de lungimi x și y cu proprietatea că*

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}<\frac{x}{y}<\frac{\sqrt{5}+1}{2}\ .$$

Soluție*

Fie a, b, c lungimile laturilor triunghiului.
Presupunem că $a \geq b \geq c$ și notăm $m=\frac{a}{b},\ n=\frac{b}{c}$. **1p**

Observăm că $m, n \geq 1>\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, deci inegalitatea din partea stângă are loc. **1p**

Vom arăta că cel puțin unul dintre numerele m, n este $\leq \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Presupunem prin absurd că m, n este $> \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. **1p**

Deoarece $b + c > a$, avem

$$n + 1 = \frac{b+c}{c} > \frac{a}{c} = mn > \frac{\sqrt{5}+1}{2} n \ .$$ **1p**

Rezultă astfel

$1 > \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} - 1\right) n = \frac{\sqrt{5}-1}{2} n = \frac{4}{2(\sqrt{5}+1)} n = \frac{2}{\sqrt{5}+1} n,$ **2p**

adică $n < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, contradicție. **1p**

3. *a) O piramidă regulată are toate feţele laterale triunghiuri echilaterale. Să se afle câte laturi poate avea baza piramidei.*
   b) Fie OABC un triedru tridreptunghic în O, iar α, β, γ măsurile unghiurilor formate de dreptele OA, OB, respectiv OC, cu planul (ABC). Arătați că $\alpha + \beta + \gamma < 135^o$.

Soluție*

a) Fie piramida $VA_1A_2...A_n$ cu feţele laterale triunghiuri echilaterale şi *O* centrul bazei piramidei.

În ΔVOA_1 dreptunghic, avem $OA_1 < VA_1 = A_1A_2 \Rightarrow$

în ΔOA_1A_2, isoscel de bază (A_1A_2), $m(\sphericalangle A_1OA_2) > m(\sphericalangle OA_1A_2) = m(\sphericalangle OA_2A_1) \Rightarrow$

$m(\sphericalangle A_1OA_2) > 60^o$ **2p**

Dar $m(\sphericalangle A_1OA_2) = \frac{360^0}{n} \Rightarrow n < \frac{360^0}{60^0} \Rightarrow n < 6$ **1p**

În concluzie, poligonul de la baza piramidei poate avea 3,4, sau 5 laturi. **1p**

b) Măsura unghiului format de o dreaptă cu un plan este cea mai mică măsură a unui unghi format de dreaptă cu orice altă dreaptă din acel plan.

Obținem că $m(\sphericalangle OA, (ABC)) < m(\sphericalangle OA, AC)$, respectiv $m(\sphericalangle OA, (ABC)) < m(\sphericalangle OA, AB)$

și analoagele **1p**

Însumând cele 6 relații, obținem $2 \cdot (\alpha + \beta + \gamma) < m(\sphericalangle OAB) + m(\sphericalangle OBA) + m(\sphericalangle OAC) +$

$m(\sphericalangle OCA) + m(\sphericalangle OBC) + m(\sphericalangle OCB) \Leftrightarrow 2 \cdot (\alpha + \beta + \gamma) < 270^o \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma < 135^o$ **2p**

Oricare altă metodă de rezolvare se punctează corespunzător. Problemele rezolvate prin încercări se punctează cu maximum 4 puncte.