CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ "*SEVER-AUREL GROZE*"

Ediția a VII-a, Beclean, 10 – 12 mai 2019

BAREM CLASA a VII-a

1. *Se consideră numerele raționale*

$$a=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n} \text{ și } b=\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{6\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{2n\cdot(2n+1)},$$

$unde\ n\geq 2\ este\ număr\ natural.\ Demonstrați\ că\ ab<\frac{2n-1}{8n+4}.$

G.M. 2/2019

Soluție*

$a+b=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}=1-\frac{1}{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}<1$ **2p**

$a>\frac{1}{2}\Rightarrow b<\frac{1}{2}\Rightarrow\left(a-\frac{1}{2}\right)\left(b-\frac{1}{2}\right)<0\Leftrightarrow ab-\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{4}<0\ \Leftrightarrow$ **2p**

$ab<\Leftrightarrow\frac{1}{2}(a+b)-\frac{1}{4}\Rightarrow ab<\frac{1}{2}\cdot\frac{2n}{2n+1}-\frac{1}{4}\ \Rightarrow ab<\frac{2n-1}{8n+4}.$ **3p**

2. *Două mulțimi A și B de numere naturale nenule se numesc „prietene" dacă pentru orice* $\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{A}$ *și orice* $\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{B}$ *numărul* ***ab + 1*** *este pătrat perfect.*

   Să se demonstreze că, dacă $\mathbf{2};\mathbf{8}\in\boldsymbol{A}$, *atunci A nu este „prietenă" cu nici o mulțime B.*

Soluție*

Presupunem că există o mulțime B care este prietenă cu A. Dacă $n\in\boldsymbol{B}$, atunci avem

$2n+1=x^2$ și $8n+1=y^2$. **1p**

Rezultă $(xy)^2=x^2y^2=(2n+1)(8n+1)=16n^2+10n+1.$ **2p**

Observăm că $(4n+1)^2<16n^2+10n+1<(4n+2)^2$, **3p**

deci numărul $16n^2+10n+1$ nu poate fi pătrat perfect, contradicție. **1p**

3. $În\ \Delta ABC, dreptunghic\ în\ A, se\ consideră\ bisectoarea\ (BD\ a\ \sphericalangle B, unde\ D\in(AC),$ $și\ E\ mijlocul\ segmentului\ (BC). Dacă\ DE\perp BD, să\ se\ calculeze\ tg\sphericalangle C.$

Soluție*

Fie *AB=c, AC=b și BC=2a.*

În $\Delta ABC\overset{t.bis.}{\Longrightarrow}\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}=\frac{c}{2a}\Rightarrow\frac{AD}{AD+DC}=\frac{c}{2a+c}\Rightarrow AD=\frac{bc}{2a+c}$ **1p**

$\Delta EDB\sim\Delta DAB\ (U.U.)\Rightarrow\frac{BE}{BD}=\frac{BD}{AB}\Rightarrow BD^2=AB\cdot BE=ca$ **1p**

În ΔADB $\xrightarrow{T.Pit.}$ $DB^2 = AD^2 + AB^2 \Rightarrow ca = \frac{b^2 \cdot c^2}{(2a+c)^2} + c^2 \Rightarrow$ **1p**

$a(2a+c)^2 = c(b^2 + 4a^2 + 4ac + c^2).$ Dar $b^2 + c^2 = 4a^2 (T.Pit.$ în $\Delta ABC) \Rightarrow$ **1p**

$a(2a+c)^2 = c(4a^2 + 4ac + 4a^2) \Leftrightarrow 2a = 3c \Rightarrow$ **1p**

$b^2 + c^2 = (3c)^2 \Leftrightarrow b^2 = 8c^2 \Leftrightarrow b = 2\sqrt{2}c \Rightarrow tgC = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{2\sqrt{2}c} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ **2p**

Oricare altă metodă de rezolvare se punctează corespunzător. Problemele rezolvate prin încercări se punctează cu maximum 4 puncte.