În Gazeta Matematică Supliment cu exerciții nr.3/2019 Daniela Cerchez a publicat problema S:E19.117:

Dacă $a,b,c>0$ sunt numere reale astfel încât $a+b+c=2$, arătați că

$$\frac{2-a^2}{a}+\frac{2-b^2}{b}+\frac{2-c^2}{c}\geq 7.$$

Clasa a VIII-a

Vom da o soluție acestei probleme.

Ținâd seama că $a+b+c=2$, inegalitatea se mai poate scrie și sub forma:

$$\frac{a+b+c-a^2}{a}+\frac{a+b+c-b^2}{b}+\frac{a+b+c-c^2}{c}\geq 7.$$

Membrul I al acestei inegalități mai poate fi scris:

$$1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}-a+\frac{a}{b}+1+\frac{c}{b}-b+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+1-c=3-(a+b+c)+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)=$$

$=3-2+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\geq 7$ pentru că dacă folosim inegalitatea : $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$ pentru orice numere reale pozitive, atunci $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$, $\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geq 2$ *si* $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq 2$.

Valer Pop