Olimpiada de Matematică –faza locală- Galaţi

14 februarie-2009

<u>CLASA a V-a</u>

Problema I

Să se scrie numărul 6^{2009}-3 ca suma de şase numere naturale consecutive.

Problemă propusă de prof. Maricel Manea

Problema II

Să se afle restul împărţirii numărului 5^{7^n} prin 31, $n \in \mathbb{N}$

Problemă propusă de prof. Cornel Hahui

.

Problema III

Se consideră mulţimea **A**={1,5,9,...,2009} şi o submulţime **B** a lui **A**, formată din **254** elemente. Să se arate că există în submulţimea **B** două elemente a căror sumă este 2018.

Problemă propusă de prof. Mihai Totolici

Problema IV

Fie numărul natural $\mathbf{x=9+99+999+...+\underbrace{999...99}_{\text{2009 cifre}}}$

a) Să se determine suma cifrelor numărului **x.**

b) Să se demonstreze că numărul format din ultimele patru cifre ale lui **x** are forma **7k+1** şi să se afle **k** $\in \mathbb{N}$

Problemă propusă de prof. Andrei Nicoară Dorina

Notă

1. Toate problemele sunt obligatorii
2. Timp efectiv de lucru 3 ore
3. Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7

Olimpiada de Matematică –faza locală- Galaţi

14 februarie-2009

CLASA a VI-a

Problema I

Să de afle numerele naturale de forma $\overline{xyz}$, în baza 10, $x \neq 0$, ştiind că $\overline{xyz}$+5=$(x-4)^{2009} + y^3 + z^2$

Problemă propusă de prof. Saulea Tatiana

Problema II

Determinaţi numărul natural **n** ştiind că este îndeplinită condiţia :

card A=12500, unde **A=** $\{x \mid 5^n < x \leq 5^{n+1}\}$

Problemă propusă de prof. Dorina Savin

Problema III

Să se determine numărul $\overline{abc}$, divizibil cu 9, ştiind că

$\frac{a-1}{2} = \frac{b-3}{3} = \frac{c-4}{5}$ şi $1 \leq a \leq 9$; $3 \leq b \leq 9$; $4 \leq c \leq 9$.

Problemă propusă de prof. Rodica şi Dumitru Bălan

Problema IV

Fie $\sphericalangle AOB$ cu măasura de 128^0 şi [OA_1 bisectoarea $\sphericalangle AOB$, [OA_2 bisectoarea $\sphericalangle AOA_1$, [OA_3 bisectoarea $\sphericalangle AOA_2$,..., [OA_7 bisectoarea $\sphericalangle AOA_6$.

1) Aflaţi măsura unghiurilor $\sphericalangle A_2OA_5$ şi $\sphericalangle BOA_7$
2) Aflaţi măsura unghiului dintre bisectoarea unghiului $\sphericalangle A_2OA_5$ şi bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOA_3$

Problemă propusă de prof. Serghie Cristi

Notă

4. Toate problemele sunt obligatorii
5. Timp efectiv de lucru 3 ore
6. Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7

Olimpiada de Matematică –faza locală- Galaţi

14 februarie-2009

Clasa a VII-a

Problema 1.

Fie $a_1,\ a_2,\ a_3,...,a_7$, şapte numere naturale pătrate perfecte. Să se arate că există două dintre ele a căror diferenţă este multiplu de 20.

Manea Marcel, profesor, Galaţi

Problema 2.

Să se determine toate numerele naturale a de trei cifre cu proprietatea $\sqrt{a+23+\sqrt{a+\sqrt{a+2009}}} \in \mathbb{N}$.

Dumitru şi Rodica Bălan, profesori, Galaţi

Problema 3.

În exteriorul triunghiului MNP se construieşte dreptunghiul NPQR. Perpendicularele din Q şi R respectiv pe MN şi MP, se intersectează în punctul T. Perpendicularele din R şi Q respectiv pe MN şi MP, se intersectează în punctul S.

a). Să se demonstreze că MT $\perp$ NP.

b). Dacă punctul O este mijlocul segmentului $[MS]$, să se demonstreze că punctul O se află pe mediatoarea segmentului $[NP]$.

c). Dacă punctul O este mijlocul segmentului $[MS]$ şi centrul dreptunghiului NPQR, să se demonstreze că triunghiul MNP este dreptunghic.

Problema 4.

Fie $ABCD$ un patrulater convex în care $AB \parallel CD,\ AC \cap BD = \{O\}$.

Prin punctul O ducem paralela la AB care intersectează AD în punctul E, iar pe BC în punctul F. Să se demonstreze că $EF \le \sqrt{AB \cdot CD}$.În ce caz are loc egalitatea?

Manea Marcel, profesor, Galaţi

<u>Notă</u>

7. Toate problemele sunt obligatorii
8. Timp efectiv de lucru 3 ore
9. Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7

Olimpiada de Matematică –faza locală- Galaţi

14 februarie-2009

Clasa a VIII-a

Problema 1.

Să se determine cardinalul mulţimii $M=\left\{x\in\mathbb{Z} / x=n^2-18\cdot n,\ \mathrm{n}\in\mathbb{N},\ \mathrm{n}<2009\right\}$.

Cîrmaciu Milu, profesor, Galaţi

Problema 2.

(**a**). Să se determine numerele reale a, b, c astfel încât:

$2\cdot|a|+3\cdot|b|+5\cdot|c|-38=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}$. Câte soluţii(triplete) verifică relaţia?

(b). Dacă $a,\ b\in\mathbb{R}_+^*$ şi $3\cdot\mathrm{a}+5\cdot\mathrm{b}=1$, să se arate că $\sqrt{3\cdot a+1}+\sqrt{5\cdot b+2}<2\cdot\sqrt{2}$.

Manea Marcel, profesor, Galaţi

Problema 3.

Fie $a_1,a_2,...,a_{2009}$ numere reale strict pozitive astfel încât $a_1+a_2+...+a_{2009}=2009$.

Să se arate că: $\dfrac{a_1^2+a_2^2}{a_1+a_2}+\dfrac{a_2^2+a_3^2}{a_2+a_3}+...+\dfrac{a_{2009}^2+a_1^2}{a_{2009}+a_1}\geq 2009$.

Veronica Grigore, profesor, Galaţi

Problema 4.

Se consideră patru puncte diferite, necoplanare, V,A,B,C astfel încât $[VB]\equiv[AC]\equiv[BC]$ şi $\mathrm{VA}>\mathrm{VC}\left(m(\measuredangle(VBA))>m(\measuredangle(VBC))\right)$. Fie $[BM$ bisectoarea $\measuredangle(VBA)$, $M\in(VA)$, $[BN$ bisectoarea $\measuredangle(VBC)$, $N\in(VC)$ şi $[AF$ bisectoarea $\measuredangle(CAB)$, $F\in(BC)$; $MN\cap(ABC)=\{P\}$; $PF\cap(AB)=\{E\}$; $(VE)\cap(BM)=\{Q\}$; $(AF)\cap(CE)=\{J\}$, să se demonstreze că $QJ\parallel(VAC)$.

Prof. Stiubianu Iulian, CNAIC, Galaţi

<u>**Notă**</u>

10. Toate problemele sunt obligatorii
11. Timp efectiv de lucru 3 ore
12. Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7

Olimpiada de Matematică –faza locală- Galaţi

14 februarie-2009

CLASA a IX-a

Problema I.

Să se rezolve ecuaţia $\left[\frac{x-2}{2}\right]+\left[\frac{2x-1}{4}\right]=\frac{3}{2}x-2$, unde [x] reprezintă partea întreagă a numărului real x.

Problemă propusă de Conf. Dr. . Ion Mirică

Problema II.

Să se calculeze expresia:

$$E=\frac{\sin 53^\circ-2\cos 40^\circ\sin 13^\circ}{\cos 63^\circ}$$

Problemă propusă de prof. Veronica Grigore

Problema III

Fie $a_n>0$, $n\in \mathbf{N}^*$**,** pentru care $a_n^2<a_n-a_{n+1}, (\forall)n\in N^*$.

Să se arate că $[n\cdot a_n]=1,\ \ (\forall)\mathrm{n}\in \mathrm{N}^*$

Problemă propusă de prof. Iuliana Duma

Problema IV

Fie unghiul **ABC şi A'**$\in$ **(BC) , B'**$\in$ **(AC) , C'**$\in$ **(AB)** astfel încât **AA' , BB', CC** sunt concurente în **M.**

Demonstraţi că :

1. $\frac{MA}{MA'}=\frac{C'A}{C'B}+\frac{B'A}{B'C}$

2. $\frac{MA}{MA'}+\frac{MB}{MB'}+\frac{MC}{MC'}+2=\frac{MA}{MA'}\cdot\frac{MB}{MB'}\cdot\frac{MC}{MC'}$

3. $\frac{MA}{MA'}+\frac{MB}{MB'}+\frac{MC}{MC'}\geq 6$

Problemă propusă de prof. Vasile Dumbravă

Notă

13. Toate problemele sunt obligatorii
14. Timp efectiv de lucru 3 ore
15. Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7

Olimpiada de Matematică –faza locală- Galaţi

14 februarie-2009

Clasa a X-a

Problema 1. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\left(\sin^2\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\alpha\right)^{\sin\alpha}\cdot\left(\cos^2\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\alpha\right)^{\cos\alpha}\le 1,(\forall)\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

**.*

Problema 2. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia:

$$\log_{\frac{\pi}{2}}\left(\arcsin\left(x-[x]\right)\right)+\log_{\frac{\pi}{2}}\left(\arccos\left(x-[x]\right)\right)=\frac{2}{\log_{\frac{\pi}{4}}\left(arctg\ e^{[x]}+arcctg\ e^{[x]}\right)}.$$

Vasile Duma, profesor, Galaţi

Problema 3. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{x^3}\ge\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{y\cdot z}+\frac{y^2}{z\cdot x}+\frac{z^2}{x\cdot y}\right)+\frac{3}{2},\ (\forall)x,\ y,\ z\in(0,\infty).$$

Dumitru şi Rodica Bălan, profesori, Galaţi

Problema 4. Să se rezolve în C ecuaţia: $|z|+|z-1|+|z-2|+...+|z-2009|=1005^2$.

Prof. Totolici Mihai, CNVA,Galaţi

<u>Notă</u>

16. Toate problemele sunt obligatorii
17. Timp efectiv de lucru 3 ore
18. Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7

Olimpiada de Matematică –faza locală- Galaţi

14 februarie-2009

Clasa a XI-a

Problema 1. Se consideră matricele $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care îndeplinesc condiţiile:

(i). $\det(A + 2008 \cdot B) = \det(2008A + B)$

(ii). $\det(A + 2009 \cdot B) = \det(2009 \cdot A + B)$.

Să se demonstreze că $\det A = \det B$.

Prof. Totolici Mihai, CNVA

Problema 2. Fie $a,\ b,\ c \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$ Să se arate că $\det\left(a \cdot X^2 + b \cdot X + c \cdot I_2\right) \geq 0,\ (\forall)\, X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dacă şi numai dacă $b^2 - 4 \cdot a \cdot c \leq 0.$

Conf. dr. Jenică Crînganu, Univ. Galaţi

Problema 3. Fie $\alpha \in \mathbb{R}.$ Să se arate că şirul cu termenul general $x_n = \{n \cdot \alpha\},\ n \in \mathbb{N},$ este convergent dacă şi numai dacă $\alpha \in \mathbb{Z}.$ (S-a notat cu $\{a\}$ partea fracţionară a numărului real a).

Conf. dr. Jenică Crînganu, Univ. Galaţi

Problema 4. Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg^{2008}(x) - arctg^{2008}(x)}{x^{2009}}$.

Dumitru şi Rodica Bălan, profesori, Galaţi

<u>Notă</u>

19. Toate problemele sunt obligatorii
20. Timp efectiv de lucru 3 ore
21. Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7

Olimpiada de Matematică –faza locală- Galaţi

14 februarie-2009

Clasa a XII-a

Problema 1. Fie $G=(k,\ \infty)-\{k+1\},\ k>0,$ pe care se defineşte legea "$*$" astfel încât

$$\log_a\left[(x*y)-k\right]=\log_a(x-k)\cdot\log_a(y-k),\ (\forall)x,y\in G,\ a>0,\ a\neq 1.$$

a) Să se determine numărul perechilor de numere întregi (k,a) pentru care elementul neutru al legii "$*$" să fie $e=2009$.

b) Să se verifice că legea "$*$" este asociativă şi să se determine elementele $x\in G$ care verifică relaţia: $x=x'$, în cazul $k=a+1=1005$ (s-a notat cu a' simetricul lui a în raport cu legea "$*$")

c) Să se determine $f:\left(\mathbb{R}^*,\cdot\right)\to(G,*)$, izomorfism de grupuri ,cu proprietăţile:

1. dreapta $y=1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcţiei f ;
2. $f(1)=2010$.

Prof. Ion Viorel, Liceul Teoretic Dunărea

Problema 2. Fie $(G,\cdot)$ un grup cu proprietatea că există $a\in G$ astfel încât $a^2x^5a^2=x,\ (\forall)x\in G$. Să se demonstreze că $x^8=e,\ (\forall)x\in G,$ unde $e\in G$ este elementul neutru al grupului $(G,\cdot)$.

Dumitru şi Rodica Bălan, profesori, Galaţi.

Problema 3. Să se calculeze $\int\frac{\sin x-x\cos x}{x^2-\sin^2 x}dx,\qquad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Prof. Dumbravă Vasile, L.E.R.,Galaţi.

Problema 4. Fie $I_n=\int_0^1\sqrt[n]{1+x+x^n}\cdot dx,\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 2.$

a) Să se calculeze I_2.

b) Să se arate că şirul $(I_n)_{n\geq 2}$ este convergent şi să se determine limita sa.

Conf. dr. Jenică Crînganu, Univ. Galaţi

<u>**Notă**</u>

22. Toate problemele sunt obligatorii
23. Timp efectiv de lucru 3 ore
24. Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7

Olimpiada de Matematică –faza locală- Galaţi

14 februarie-2009

Clasa a VII-a

Soluţii

Problema 1. Fie $a_1,\ a_2,\ a_3,...,a_7$, şapte numere naturale pătrate perfecte. Să se arate că există două dintre ele a căror diferenţă este multiplu de 20.

Manea Marcel, profesor, Galaţi

Soluţie: Ultima cifră a unui număr natural pătrat perfect aparţine mulţimii $\{0,1,4,5,6,9\}$. Deci conform principiului cutiei există două dintre cele 7 cu aceeaşi ultimă cifră. Fie acestea a_m şi a_n (putem presupune $a_m>a_n$).

Numărul a_m-a_n are ultima cifră 0, deci $a_m-a_n=M_{10}\subset M_5$. (1)

Fie $a_m=p^2$ şi $a_n=q^2$. Evident p, respectiv q, au paritate egală cu a lui a_m, respectiv cu a lui a_n, deci p-q şi p+q sunt numere pare. Rezultă că $a_m-a_n=p^2-q^2=(p-q)(p+q)=4\cdot k= M_4$ (2)

(p şi q sunt de aceeaşi paritate).

Din (1) şi (2) rezultă că $a_m-a_n=M_{20}$.

Problema 2. Să se determine toate numerele naturale a de trei cifre cu proprietatea

$\sqrt{a+23+\sqrt{a+\sqrt{a+2009}}}\in\mathbb{N}$.

Soluţie: $100\le a\le 999\Rightarrow 2109\le a+2009\le 3008.$ Punând condiţia ca numărul a+2009 să fie pătrat perfect, se obţine: $a+2009\in\{2116,\ 2209,\ 2304,\ 2401,\ 2500,\ 2601,\ 2704,\ 2809,\ 2916\}$.

Aşadar, $\sqrt{a+2009}\in\{46,47,48,49,50,51,52,53,54\}$ şi

$a+\sqrt{a+2009}\in\{153,247,343,441,541,643,747,853,961\}$.Dar $a+\sqrt{a+2009}$ trebuie să fie pătrat perfect.

Rezultă că $a+\sqrt{a+2009}\in\{441,961\}$. Obţinem că $\sqrt{a+\sqrt{a+2009}}\in\{21,31\}$ şi

$a+23+\sqrt{a+\sqrt{a+2009}}\in\{436,961\}$.

Deoarece $\sqrt{436}\notin\mathbb{N}$ şi $\sqrt{961}=31\in\mathbb{N}$, rezultă că $\sqrt{a+23+\sqrt{a+\sqrt{a+2009}}}=31\Rightarrow a=907$.

Dumitru şi Rodica Bălan, profesori, Galaţi

Problema 3. În exteriorul triunghiului MNP se construieşte dreptunghiul NPQR. Perpendicularele din Q şi R respectiv pe MN şi MP, se intersectează în punctul T. Perpendicularele din R şi Q respectiv pe MN şi MP, se intersectează în punctul S.

a). Să se demonstreze că MT $\perp$ NP.

b). Dacă punctul O este mijlocul segmentului $[MS]$,să se demonstreze că punctul O se află pe mediatoarea segmentului $[NP]$.

c). Dacă punctul O este mijlocul segmentului $[MS]$ şi centrul dreptunghiului NPQR, să se demonstreze că triunghiul MNP este dreptunghic.

Gusta Constanţa, profesor, Galaţi

Soluţie:

Construim paralelogramul MPQL $\Rightarrow$ ML $\parallel$ PQ, $[ML]\equiv[PQ]$.

Dar PQ $\parallel$ NR şi $[PQ]\equiv[NR]$, rezultă că ML $\parallel$ NR, $[ML]\equiv[NR]\Rightarrow$ MNRL paralelogram;

$$\left.\begin{array}{l}PQ \parallel ML\\ PQ \perp NP\end{array}\right\}\Rightarrow ML \perp NP \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}LQ \parallel MP\\ RT \perp MP\end{array}\right\}\Rightarrow RT \perp LQ$$

a).

Analog, se demonstrează că QT $\perp$ LR;

$$\left.\begin{array}{l}RT \perp LQ\\ QT \perp LR\end{array}\right\}\Rightarrow \text{punctul T este ortocentrul triunghiului LRQ} \Rightarrow LT \perp RQ;$$

$$\left.\begin{array}{l}LT \perp RQ\\ RQ \parallel NP\end{array}\right\}\Rightarrow LT \perp NP \quad (2)$$

Din (1) *şi* (2) $\Rightarrow$ punctele M,L,T sunt colineare $\Rightarrow$ MT $\perp$ NP.

b).Fie $ST\cap RQ=\{U\}$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}RT \perp MP\\ SQ \perp MP\end{array}\right\}\Rightarrow RT \parallel SQ\\ \text{Analog, se demonstreaza ca } RS \parallel TQ\end{array}\right\}\Rightarrow \text{RSQT paralelogram} \Rightarrow$$

punctul U este mijlocul diagonalelor :$[RU]\equiv[UQ]$;

In triunghiul MTS : $\begin{cases}[OM]\equiv[OS]\\ [UR]\equiv[US]\end{cases}\Rightarrow[OU]$ este linie mijlocie $\Rightarrow$ OU $\parallel$ MT;

$$\left.\begin{array}{l}OU \parallel MT\\ MT \perp NP\end{array}\right\}\Rightarrow OU \perp NP;$$

$$\left.\begin{array}{l}[RU]\equiv[UQ]\\ OU \perp RQ\end{array}\right\}\Rightarrow \text{OU este mediatoarea segmentului} [NP] \ \Rightarrow O\in \text{mediatoarei segmentului } [NP]$$

c).

$$\left.\begin{array}{l}\text{Punctul O este centrul dreptunghiului NPQR} \Rightarrow OU=\frac{1}{2}\cdot PQ\\ \textit{Dar } [PQ]\equiv[ML]\end{array}\right\}\Rightarrow OU=\frac{1}{2}\cdot ML;$$

Cum $[OU]$ este linie mijlocie în triunghiul MTS $\Rightarrow OU=\frac{1}{2}\cdot MT$;

$$\left.\begin{array}{l}OU=\frac{1}{2}\cdot ML\\ OU=\frac{1}{2}\cdot MT\end{array}\right\}\Rightarrow \text{punctele L şi T coincid} : L=T\Rightarrow RL\perp MP;$$

$$\left.\begin{array}{l}RL \perp MP\\ RL \parallel MN\end{array}\right\}\Rightarrow MN \perp MP \Rightarrow \triangle MNP \text{ este dreptunghic.}$$

Problema 4. Fie $ABCD$ un patrulater convex şi în care $AB\parallel CD,\ AC\cap BD=\{O\}$.

Prin punctul O ducem paralela la AB care intersectează AD în punctul E, iar pe BC în punctul F. Să se demonstreze că $EF\le\sqrt{AB\cdot CD}$.În ce caz are loc egalitatea?

Manea Marcel, profesor, Galaţi

Soluţie:

Cazuri: I) AD||BC$\Rightarrow$ABCD paralelogram şi inegalitatea este adevarată(devine egalitate) pentru că EF=AB=CD.

II) $AD \cap BC \neq \varnothing \Rightarrow ABCD$ este trapez. Se demonstrează că EF=$\dfrac{2}{\dfrac{1}{AB}+\dfrac{1}{CD}}$ astfel:

$$\left.\begin{array}{l}
EO \parallel AB \Rightarrow \triangle DEO \sim \triangle DAB \Leftrightarrow \dfrac{EO}{AB}=\dfrac{DO}{DB} \\
FO \parallel AB \Rightarrow \triangle CFO \sim \triangle CBA \Leftrightarrow \dfrac{OF}{AB}=\dfrac{CO}{AC} \\
DC \parallel AB \Rightarrow \triangle DOC \sim \triangle BOA \Leftrightarrow \dfrac{DO}{OB}=\dfrac{CO}{AO} \Leftrightarrow \dfrac{DO}{DB}=\dfrac{CO}{AC}
\end{array}\right\} \Rightarrow [EO] \equiv [OF].$$

$$EO \parallel CD \Rightarrow \triangle AEO \sim \triangle ADC \Leftrightarrow \frac{EO}{DC}=\frac{AO}{AC}$$

$$\frac{EO}{AB}+\frac{EO}{DC}=\frac{DO}{DB}+\frac{AO}{AC}=\frac{CO}{AC}+\frac{AO}{AC}=1 \Rightarrow EO=\frac{AB\cdot CD}{AB+CD}$$

$$EF=2\cdot EO=\frac{2\cdot AB\cdot CD}{AB+CD}.$$

deci EF este media armonică între AB şi CD şi conform inegalităţii mediilor$\Rightarrow$ EF$\leq\sqrt{AB\cdot CD}$.

Olimpiada de Matematică –faza locală- Galaţi

14 februarie-2009

Clasa a VIII-a

Soluţii

Problema 1. Să se determine cardinalul mulţimii $M=\left\{x\in\mathbb{Z} / x=n^2-18\cdot n,\ \text{n}\in\mathbb{N},\ \text{n<2009}\right\}$.

Soluţie: Fie două elemente egale din mulţimea M:

$a=n^2-18\cdot n,\ b=m^2-18\cdot m,\ m,n\in\mathbb{N},\ m\neq n.$

$a=b\Rightarrow n^2-18\cdot n=m^2-18\cdot m\Leftrightarrow(m-n)\cdot(m+n-18)=0.$

Dar m ≠ n. Atunci m+n-18=0 ⇒ m+n=18, $m,n\in\mathbb{N},\ m\neq n$

Dacă
$$\begin{array}{l} m=0\Rightarrow n=18\\ m=1\Rightarrow n=17\\ \dots\dots\dots\dots\\ m=8\Rightarrow n=10\end{array}$$

Deci 9 elemente din cele 2009 din mulţimea M se repetă. În concluzie, card M=2000.

Cîrmaciu Milu, profesor, Galaţi

Problema 2.

(**a**). Să se determine numerele reale a, b, c astfel încât:

$2\cdot|a|+3\cdot|b|+5\cdot|c|-38=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}$. Câte soluţii(triplete) verifică relaţia?

(b). Dacă $a,\ b\in\mathbb{R}_+^*$ şi $3\cdot\text{a}+5\cdot\text{b}=1$, să se arate că: $\sqrt{3\cdot a+1}+\sqrt{5\cdot b+2}<2\cdot\sqrt{2}$.

Manea Marcel, profesor, Galaţi

Soluţie:

a) $a^2-4\cdot|a|+4+b^2-6\cdot|b|+9+\text{c}^2-10\cdot|c|+25+38=0$

$\Leftrightarrow(|a|-2)^2+(|b|-3)^2+(|\text{c}|-5)^2+38=0\Leftrightarrow a,b,c\in\varnothing$

Soluţii: $S=\varnothing$.

b) Se aplică inegalitatea $\sqrt{x}+\sqrt{y}\leq 2\cdot\sqrt{\dfrac{x+y}{2}},\ (\forall)x,y\geq 0$,

Deci $\sqrt{3\cdot a+1}+\sqrt{5\cdot b+2}<2\cdot\sqrt{\dfrac{3\cdot a+1+5\cdot b+2}{2}}=2\cdot\sqrt{\dfrac{4}{2}}=2\cdot\sqrt{2}$

Problema 3. Fie $a_1,a_2,...a_{2009}$ numere reale strict pozitive astfel încât $a_1+a_2+...+a_{2009}=2009$.

Să se arate că: $\frac{a_1^2+a_2^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2+a_3^2}{a_2+a_3}+...+\frac{a_{2009}^2+a_1^2}{a_{2009}+a_1}\geq 2009$.

Veronica Grigore, profesor, Galaţi

Soluţie:

Se foloseşte inegalitatea:

$$\frac{a_1^2+a_2^2}{a_1+a_2}\geq\frac{a_1+a_2}{2}\Leftrightarrow 2\cdot a_1^2+2\cdot a_2^2\geq a_1^2+a_2^2+2\cdot a_1\cdot a_2\Leftrightarrow\left(a_1-a_2\right)^2\geq 0,\quad(\forall)a_1,a_2>0,$$

Se obţine:

$$\frac{a_1^2+a_2^2}{a_1+a_2}\geq\frac{a_1+a_2}{2}$$

$$\frac{a_2^2+a_3^2}{a_2+a_3}\geq\frac{a_2+a_3}{2}\quad .$$

....

$$\frac{a_{2009}^2+a_1^2}{a_{2009}+a_1}\geq\frac{a_{2009}+a_1}{2}$$

Prin adunarea inegalităţilor se obţine:

$$\frac{a_1^2+a_2^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2+a_3^2}{a_2+a_3}+...+\frac{a_{2009}^2+a_1^2}{a_{2009}+a_1}\geq\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_2+a_3}{2}+...+\frac{a_{2009}+a_1}{2}.$$

Dar $a_1+a_2+...+a_{2009}=2009$, rezulta că

$$\frac{a_1^2+a_2^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2+a_3^2}{a_2+a_3}+...+\frac{a_{2009}^2+a_1^2}{a_{2009}+a_1}\geq 2009$$

Problema 4. Se consideră patru puncte diferite, necoplanare, V,A,B,C astfel încât $[VB]\equiv[AC]\equiv[BC]$ şi $VA>VC\left(m\left(\measuredangle(VBA)\right)>m\left(\measuredangle(VBC)\right)\right)$. Fie $[BM$ bisectoarea $\measuredangle(VBA)$, $M\in(VA)$, $[BN$ bisectoarea $\measuredangle(VBC)$, $N\in(VC)$ şi $[AF$ bisectoarea $\measuredangle(CAB)$, $F\in(BC)$; $MN\cap(ABC)=\{P\}$; $PF\cap(AB)=\{E\}$; $(VE)\cap(BM)=\{Q\}$; $(AF)\cap(CE)=\{J\}$,să se demonstreze că $QJ\parallel(VAC)$.

Prof. Ştiubeianu Iulian, CNAIC, Galaţi

Se demonstrează că punctul

$$\left.\begin{array}{l} M\in(VA)\Rightarrow M\in(VAC) \\ N\in(VC)\Rightarrow N\in(VAC) \end{array}\right\}\Rightarrow MN\subset(VAC);$$

$$\left.\begin{array}{l} MN\subset(VAC) \\ P\in MN \end{array}\right\}\Rightarrow P\in(VAC)$$

$$\left.\begin{array}{l} P\in(VAC) \\ P\in(ABC) \end{array}\right\}\Rightarrow P\in(VAC)\cap(ABC)\Rightarrow P\in(AC).$$

$$\triangle VAB:\ [BM-bi\sec toarea\ \measuredangle(VBA)\xrightarrow{T.bis}\frac{VM}{AM}=\frac{VB}{AB}$$

$$\triangle VBC:\ [BN-bi\sec toarea\ \measuredangle(VBC)\xrightarrow{T.bis}\frac{VN}{NC}=\frac{VB}{BC}$$

$$\triangle VAC:\ M,N,P\text{ sunt coliniare}\xrightarrow{T.Menelaus}\frac{VM}{AM}\cdot\frac{PA}{PC}\cdot\frac{NC}{NV}=1\Rightarrow\frac{VB}{AB}\cdot\frac{PA}{PC}\cdot\frac{BC}{VB}=1\Rightarrow$$

$$\frac{PA}{PC}\cdot\frac{BC}{AB}=1$$

Dar $[BC]\equiv[AC]$.Rezulta $\frac{PA}{PC}\cdot\frac{AC}{AB}=1;$

$$\triangle ABC:\ [AF-bi\sec toarea\measuredangle(BAC)\xrightarrow{T.bis.}\frac{AC}{AB}=\frac{CF}{FB}$$

$$Deci\ \frac{PA}{PC}\cdot\frac{CF}{FB}=1$$

$$\triangle ABC:\ \text{P,F,E coliniare}\xrightarrow{T.Menelaus}\frac{PA}{PC}\cdot\frac{EB}{EA}\cdot\frac{CF}{FB}=1\Rightarrow\frac{EB}{EA}=1\Rightarrow[EA]=[EB](1);$$

$$\triangle VBE:\ [BQ-bi\sec toarea\measuredangle(VBE)\xrightarrow{T.bis.}\frac{VB}{BE}=\frac{VQ}{QE}\Rightarrow BE=\frac{VB\cdot QE}{VQ}(2)$$

$$\triangle AEC:\ [AJ-bi\sec toarea\measuredangle(EAC)\xrightarrow{T.bis.}\frac{AE}{EC}=\frac{EJ}{JC}\Rightarrow AE=\frac{AC\cdot EJ}{JC}(3)$$

$$\left.\begin{array}{l} Din\ 1,2,3\Rightarrow\dfrac{VB\cdot QE}{VQ}=\dfrac{AC\cdot EJ}{JC} \\ Dar\ [VB]=[AC] \end{array}\right\}\Rightarrow\frac{QE}{VQ}=\frac{EJ}{JC}\xrightarrow{R.Th.Tales}QJ\parallel VC$$

$$P\in AC\quad\left.\begin{array}{l} QJ\parallel VC \\ VC\subset(VAC) \end{array}\right\}\Rightarrow \text{QJ}\parallel(VAC)$$

Olimpiada de Matematică –faza locală- Galaţi

14 februarie-2009

Clasa a X-a

Soluţii

Problema 1. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\left(\sin^2\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\alpha\right)^{\sin\alpha}\cdot\left(\cos^2\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\alpha\right)^{\cos\alpha}\le 1,(\forall)\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

Soluţie: $(\forall)\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\sin\alpha>0,\ \cos\alpha>0$ **;**

Se logaritmeză natural inegalitatea din enunţ şi se obţine:

$$\sin\alpha\cdot\ln(\sin\alpha)+\cos\alpha\cdot\ln(\cos\alpha)+(\sin\alpha+\cos\alpha)\cdot\ln(\sin\alpha+\cos\alpha)\le 0,\ (\forall)\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}\cdot\ln(\sin\alpha)+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}\cdot\ln(\cos\alpha)\le-\ln(\sin\alpha+\cos\alpha)$$

Aplicând inegalitatea lui Jensen funcţiei concave $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln x$, obţinem:

$$f\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}\cdot\sin\alpha+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}\cdot\cos\alpha\right)\ge\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}f(\sin\alpha)+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}\cdot f(\cos\alpha)\Leftrightarrow$$

inegalitatea propusă

Problema 2. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia:

$$\log_{\frac{\pi}{2}}\left(\arcsin\left(x-[x]\right)\right)+\log_{\frac{\pi}{2}}\left(\arccos\left(x-[x]\right)\right)=\frac{2}{\log_{\frac{\pi}{4}}\left(arctg\ e^{[x]}+arcctg\ e^{[x]}\right)}.$$

Vasile Duma, profesor, Galaţi

Soluţie:

$$\{x\}\in[0,1),\ (\forall)x\in\mathbb{R}\Rightarrow\begin{cases}\arcsin\{x\}\geq 0,\ (\forall)x\in\mathbb{R}\\ \arccos\{x\}\geq 0,\ (\forall)x\in\mathbb{R}\end{cases}\Rightarrow\arcsin\{x\}\cdot\arccos\{x\}>0,\ (\forall)x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{x}-[x]=\{x\},(\forall)x\in\mathbb{R}\\ arctg\ y+arcctg\ \mathrm{y}=\dfrac{\pi}{2},\ (\forall)y\in\mathbb{R}\\ \log_{\frac{\pi}{2}}\left(\arcsin\left(x-[x]\right)\right)+\log_{\frac{\pi}{2}}\left(\arccos\left(x-[x]\right)\right)=\dfrac{2}{\log_{\frac{\pi}{4}}\left(arctg\ e^{[x]}+arcctg\ \mathrm{e}^{[x]}\right)}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\log_{\frac{\pi}{2}}\left(\arcsin\{x\}\cdot\arccos\{x\}\right)=\frac{2}{\log_{\frac{\pi}{4}}\frac{\pi}{2}}\Leftrightarrow$$

$$\log_{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\arcsin\{x\}\cdot\arccos\{x\}}=\log_{\frac{\pi}{2}}\frac{\arcsin\{x\}+\arccos\{x\}}{2}\Leftrightarrow\arcsin\{x\}=\arccos\{x\}\Leftrightarrow$$

$$\{x\}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}+k\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}\subset\mathbb{R}-\mathbb{Z}$$

$Obs.$ $\arcsin \mathrm{z}+\arccos \mathrm{z}=\dfrac{\pi}{2},\ (\forall)z\in[-1,1]$

Problema 3. Să se demonsreze inegalitatea:

$$\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{x^3}\geq\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{y\cdot z}+\frac{y^2}{z\cdot x}+\frac{z^2}{x\cdot y}\right)+\frac{3}{2},\ (\forall)x,\ y,\ z\in(0,\infty).$$

Dumitru şi Rodica Bălan, profesori, Galaţi

Soluţie:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Fie } a,b\in\mathbb{R},\ \mathrm{a+b>0};\\ (a-b)^2\geq 0,\ (\forall)\ \mathrm{a,\ b}\in\mathbb{R}\end{array}\right\}\Rightarrow(a-b)^2\cdot(a+b)\geq 0\Leftrightarrow\left(a^2-b^2\right)\cdot(a-b)\geq 0\Leftrightarrow$$

$$a^3+b^3\geq a^2\cdot b+a\cdot b^2\quad(1)$$

Inegalitatea din enunţ devine: $2\left(\dfrac{x^3}{y^3}+\dfrac{y^3}{z^3}+\dfrac{z^3}{x^3}\right)\geq\dfrac{x^2}{y\cdot z}+\dfrac{y^2}{x\cdot z}+\dfrac{z^2}{x\cdot y}+3.$

Folosind inegalitatea (1), se obţine:

$$2\left(\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{x^3}\right)=\left(\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{z^3}\right)+\left(\frac{x^3}{y^3}+\frac{z^3}{x^3}\right)+\left(\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{x^3}\right)\geq\frac{x^2}{y^2}\cdot\frac{y}{z}+\frac{x}{y}\cdot\frac{y^2}{z^2}+\frac{x^2}{y^2}\cdot\frac{z}{x}+$$

$$\frac{x}{y}\cdot\frac{z^2}{x^2}+\frac{y^2}{z^2}\cdot\frac{z}{x}+\frac{y}{z}\cdot\frac{z^2}{x^2}=\frac{x^2}{y\cdot z}+\frac{x\cdot y}{z^2}+\frac{x\cdot z}{y^2}+\frac{z^2}{x\cdot y}+\frac{y^2}{x\cdot z}+\frac{y\cdot z}{x^2}\geq\frac{x^2}{y\cdot z}+\frac{z^2}{x\cdot y}+\frac{y^2}{x\cdot z}+3,\text{deoarece}$$

$$\frac{x\cdot y}{z^2}+\frac{x\cdot z}{y^2}+\frac{y\cdot z}{x^2}\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{x\cdot y}{z^2}\cdot\frac{x\cdot z}{y^2}\cdot\frac{y\cdot z}{x^2}}=3,\ (\forall)x,\ \mathrm{y,\ z}\in(0,\infty)$$

Problema 4. Să se rezolve în C ecuaţia: $|z|+|z-1|+|z-2|+...+|z-2009|=1005^2$.

Prof. Totolici Mihai, CNVA

Soluţie:

$|z|+|z-2009|=|z|+|2009-z|\geq|z+2009-z|=2009,$ cu egalitate atunci când $M(z)\in[A_0A_{2009}]$, unde A_i are afixul i, $i\in\{0,1,2,3,...,2009\}$. Aşadar, are loc egalitatea pentru $z\in R$, $z\in[0,2009]$.

Anolog, $|z-1|+|z-2008|=|z-1|+|2008-z|\geq|z-1+2008-z|=2007,$ cu egalitate pentru $z\in\mathbb{R}$, $z\in[1,2007]$; Adunând

Succesiv, $|z-2|+|z-2007|\geq 2005,$ cu egalitate pentru $z\in\mathbb{R}$, $z\in[2,2005]$

. . . .

$|z-1004|+|z-1005|\geq 1,$ cu egalitate pentru $z\in[1004,1005]$;

aceste inegalităţi, obţinem:

$|z|+|z-1|+|z-2|+...+|z-2009|\geq 2009+2007+2005+...+3+1=1005^2$, adică are loc egalitatea în toate cele 1005 cazuri.

Soluţia ecuaţiei este: $z\in\mathbb{R}$, $z\in[1004,1005]$

Olimpiada de Matematică –faza locală- Galaţi

14 februarie-2009

Clasa a XI-a

Soluţii

Problema 1. Se consideră matricele $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care îndeplinesc condiţiile:

(i). $\det(A + 2008 \cdot B) = \det(2008 \cdot A + B)$

(ii). $\det(A + 2009 \cdot B) = \det(2009 \cdot A + B)$.

Să se demonstreze că $\det A = \det B$.

Prof. Totolici Mihai, CNVA

Soluţie:

Fie funcţia

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \mathrm{f}(x) = \det(A + x \cdot B) - \det(x \cdot A + B), A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R});$

După calcule, se obţine $f(x) = \alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma,\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R};$

Din ipoteză se obţine: $f(2008) = f(2009) = f(1) = 0,$ adică ecuaţia de grad cel mult doi, $f(x) = 0$ are trei rădăcini reale distincte. Rezultă că f este funcţia nulă: $f(x) = 0,\ (\forall) x \in \mathbb{R}.$

Aşadar, pentru $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow \det A = \det B.$

Problema 2. Fie $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}, a \neq 0.$ Să se arate că $\det\left(a \cdot X^2 + b \cdot X + c \cdot I_2\right) \geq 0,\ (\forall) X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dacă şi numai dacă $b^2 - 4 \cdot a \cdot c \leq 0.$

Conf. dr. Jenică Crînganu, Univ. Galaţi

Soluţie:

$"\Rightarrow".$ Presupunem că $\det\left(a \cdot X^2 + b \cdot X + c \cdot I_2\right) \geq 0,\ (\forall) X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$ Pentru

$X = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R},$ obţinem $\det\left(a \cdot X^2 + b \cdot X + c \cdot I_2\right) = \det\left(a \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & x \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$

$\det\begin{pmatrix} ax + c & bx \\ b & ax + c \end{pmatrix} = (a \cdot x + c)^2 - b^2 \cdot x \geq 0,\ (\forall) x \in \mathbb{R},$ adică

$a^2 \cdot x^2 + \left(2 \cdot a \cdot c - b^2\right) \cdot x + c^2 \geq 0,\ (\forall) x \in \mathbb{R},$

condiţie echivalentă cu $\left(2 \cdot a \cdot c - b^2\right)^2 - 4 \cdot a^2 \cdot c^2 \leq 0 \Leftrightarrow b^4 - 4 \cdot a \cdot c \cdot b^2 \leq 0 \Leftrightarrow$

$b^2\left(b^2 - 4 \cdot a \cdot c\right) \leq 0,$ de unde rezultă că $b^2 - 4 \cdot a \cdot c \leq 0.$

$" \Leftarrow "$. Să demonstrăm că dacă $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi $k \geq 0$, atunci $\det\left(X^2 + k \cdot I_n\right) \geq 0.$

Intr-adevăr, $\det\left(X^2 + k \cdot I_n\right) = \det\left(X + i\sqrt{k} I_n\right) \cdot \det\left(X - i\sqrt{k} I_n\right) =$

$\det\left(X + i\sqrt{k} I_n\right) \cdot \det\left(\overline{X + i\sqrt{k} I_n}\right) = \det\left(X + i\sqrt{k} I_n\right) \cdot \overline{\det\left(X + i\sqrt{k} I_n\right)} =$

$\left|\det\left(X + i\sqrt{k} I_n\right)\right|^2 \geq 0.$

Presupunem că $b^2 - 4ac \leq 0$ şi fie $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$a \cdot X^2 + b \cdot X + c \cdot I_2 = a \cdot \left[\left(X + \frac{b}{2a} \cdot I_2\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \cdot I_2\right] = a \cdot \left(Y^2 + k \cdot I_2\right),$$

unde $Y = X + \frac{b}{2a} \cdot I_2$, $k = \frac{4ac - b^2}{4a^2} \geq 0.$

Atunci, $\det\left(a \cdot X^2 + b \cdot X + c \cdot I_2\right) = \det\left[a \cdot \left(Y^2 + k \cdot I_2\right)\right] = a^2 \cdot \det\left(Y^2 + k \cdot I_2\right) \geq 0.$

Problema 3. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$. Să se arate că şirul cu termenul general $x_n = \{n \cdot \alpha\}$, $n \in \mathbb{N}$, este convergent dacă şi numai dacă $\alpha \in \mathbb{Z}$. (S-a notat cu $\{a\}$ partea fracţionară a numărului real a)

Conf. dr. Jenică Crînganu, Univ. Galaţi

Soluţie:

$" \Leftarrow "$. Dacă $\alpha \in \mathbb{Z}$, rezultă $x_n = 0$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$ şi evident $(x_n)_{n \geq 0}$ e convergent .

$" \Rightarrow "$. Presupunem că $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent şi fie $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x \in \mathbb{R}$.

Atunci $x_{n+1} - x_n \to 0$. Cum $x_{n+1} - x_n = \{(n+1) \cdot \alpha\} - \{n \cdot \alpha\} =$

$(n+1) \cdot \alpha - [(n+1) \cdot \alpha] - n\alpha + [n\alpha] = \alpha - y_n$, unde $y_n = [(n+1) \cdot \alpha] - [n \cdot \alpha] \in \mathbb{Z}$,

rezultă că $\alpha - y_n \to 0$, deci $y_n \to \alpha$. Dar $(y_n)_{n \geq 0}$ este un şir cu termeni întregi $\Rightarrow \alpha \in \mathbb{Z}$.

Problema 4. Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg^{2008}(x) - arctg^{2008}(x)}{x^{2009}}$.

Dumitru şi Rodica Bălan, profesori, Galaţi

Soluţie: Notăm limita data cu L.

$$\mathrm{L}=\lim_{x\to 0}\frac{tg^{2008}(x)-arctg^{2008}(x)}{x^{2009}}=\lim_{x\to 0}\frac{tgx-arctgx}{x^2}\cdot\frac{1}{x^{2007}}\sum_{k=0}^{2007}tg^{2007-k}(x)\cdot arctg^{k}x=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-arctgx}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\sum_{k=0}^{2007}\left(\frac{tgx}{x}\right)^{2007-k}\cdot\left(\frac{\mathrm{arctgx}}{x}\right)^{k}=L_1\cdot L_2,$$

unde $\mathrm{L}_1=\lim_{x\to 0}\frac{tgx-arctgx}{x^2}$ şi

$$\mathrm{L}_2=\lim_{x\to 0}\sum_{k=0}^{2007}\left(\frac{tgx}{x}\right)^{2007-k}\cdot\left(\frac{\mathrm{arctgx}}{x}\right)^{k}.$$

$$\mathrm{L}_1=\lim_{x\to 0}\frac{tgx-arctgx}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{tgx-x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{x-arctgx}{x^2}.$$

Deoarece $\sin x\le x,\ (\forall)x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)-\{0\}$, avem

$$0\le\left|\frac{tgx-x}{x^2}\right|\le\left|\frac{tgx-\sin x}{x^2}\right|\le\left|\frac{tgx\cdot(1-\cos x)}{x^2}\right|=\left|\frac{tgx\cdot\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^2}\right|,\ \text{pentru x}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)-\{0\}.$$

Cum $\lim_{x\to 0}\left|\frac{tgx\cdot\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^2}\right|=\left|\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}tgx\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\right|=\left|\frac{1}{2}\cdot 0\cdot 1^2\right|=0,$ rezultă

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-x}{x^2}=0.$$

Notăm arctgx=y

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-arctgx}{x^2}=\lim_{y\to 0}\frac{tgy-y}{tg^2y}=\lim_{y\to 0}\frac{tgy-y}{y^2}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{tg^2y}=0\cdot 1=0.$$

$$L_1=0.$$

$$L_2=\lim_{x\to 0}\sum_{k=0}^{2007}\left(\frac{tgx}{x}\right)^{2007-k}\cdot\left(\frac{\mathrm{arctgx}}{x}\right)^{k}=\sum_{k=0}^{2007}\lim_{x\to 0}\left(\frac{tgx}{x}\right)^{2007-k}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{arctgx}{x}\right)^{k}=$$

$$\sum_{k=0}^{2007}1\cdot 1=2008.$$

$$L=L_1\cdot L_2=0\cdot 2008=0.$$

Olimpiada de Matematică –faza locală- Galaţi

14 februarie-2009

Clasa a XII-a

Soluţii

Problema 1. Fie mulţimea $G=(k,\ \infty)-\{k+1\},\ k>0,$ pe care se defineşte legea "$*$" astfel încât

$$\log_a\left[(x*y)-k\right]=\log_a(x-k)\cdot\log_a(y-k),\ (\forall)x,y\in G,\ \text{a>0, a}\neq 1.$$

a). Să se determine numărul perechilor de numere întregi (k,a) pentru care elementul neutru al legii "$*$" să fie $e=2009$.

b). Să se verifice că legea "$*$" este asociativă şi să se determine elementele $x\in G$ care verifică relaţia: $x=x'$, în cazul $k=a+1=1005$.(s-a notat cu a' simetricul lui a în raport cu legea "$*$") .

c). Să se determine $f:(\mathbb{R}^*,\cdot)\to(G,*)$, izomorfism de grupuri, cu proprietăţile:

3. dreapta $y=1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcţiei f ;
4. $f(1)=2010$.

Prof. Ion Viorel, Liceul Teoretic Dunărea, Galaţi

Soluţie: Din calcul se obţine: $x*y=k+(x-k)^{\log_a(y-k)}$, x,y$\in G=(k,\ \infty)-\{k+1\},\ k>0$

Din $e\in G$ element neutru $\Rightarrow$ x$*$e=e$*x=x,(\forall)x\in G$

x$*$e=$x\Leftrightarrow k+(x-k)^{\log_a(e-k)}=x\Leftrightarrow(x-k)^{\log_a(e-k)}=x-k\Leftrightarrow$

a). $\log_a(e-k)=1\Leftrightarrow e-k=a\Leftrightarrow e=k+a\in G.$

$k+a=2009,$ k,a$\in\mathbb{Z},$ k>0$\Rightarrow(k,a)\in\{(1,2008),\ (2,2007),\ (3,2006),\ ...,(2008,1)\}.$

Numărul de perechi este 2008.

b). Se verifică asociativitatea;

k=1005,a=1004

$x*x'=e\Leftrightarrow x'=k+a^{\frac{\log_a(e-k)}{\log_a(x-k)}}\in G$

Pentru x=x' obţinem: $\log^2_{1004}(x-1005)=1\Rightarrow$

1). $\log_{1004}(x-1005)=1\Rightarrow x_1=2009\in G$

2). $\log_{1004}(x-1005)=-1\Rightarrow x_2=1005+\dfrac{1}{1004}\in G$

c).

Fie $f:\mathbb{R}-\{0\}\to G,\ f(x)=k+a^x, k>0,$ a>0, a $\neq 1$.

Se verifică că funcţia f este izomorfism de grupuri.

Dreapta y=1 este asimptotă orizontală spre - ∞ $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\left(k+a^x\right)=1 \Leftrightarrow k=1;$

$f(1)=2010 \Leftrightarrow 1+a=2010 \Leftrightarrow a=2009.$

$f(x)=1+2009^x,\ x\in\mathbb{R}-\{0\}.$

Problema 2. Fie $(G,\cdot)$ un grup cu proprietatea că există $a\in G$, astfel încât $a^2x^5a^2=x,\ (\forall)x\in G$. Să se demonstreze că $x^8=e,\ (\forall)x\in G$, unde $e\in G$ este elementul neutru al grupului $(G,\cdot)$.

Dumitru şi Rodica Bălan, profesori, Galaţi.

Soluţie:

Pentru x=e, relaţia din enunţ devine: $a^2\cdot e^5\cdot a^2=e \Leftrightarrow a^2\cdot e\cdot a^2=e \Leftrightarrow a^4=e.$

Prin compunere la stânga şi la dreapta cu a^2, relaţia din ipoteză devine

$a^2\cdot\left(a^2\cdot x^5\cdot a^2\right)\cdot a^2=a^2\cdot x\cdot a^2 \Leftrightarrow a^4\cdot x^5\cdot a^4=a^2\cdot x\cdot a^2 \Leftrightarrow x^5=a^2\cdot x\cdot a^2,\ (\forall)x\in G\quad (1)$

Înlocuind în relaţia (1) pe x cu $x\cdot y$, unde $x,y\in G$ sunt arbitrare, obţ inem:

$(x\cdot y)^5=a^2\cdot(x\cdot y)\cdot a^2 \Leftrightarrow (x\cdot y)\cdot(x\cdot y)\cdot(x\cdot y)\cdot(x\cdot y)\cdot(x\cdot y)=a^2\cdot\left(x\cdot a^4\cdot y\right)\cdot a^2 \Leftrightarrow$

$x\cdot(y\cdot x\cdot y\cdot x\cdot y\cdot x\cdot y\cdot x)\cdot y=\left(a^2\cdot x\cdot a^2\right)\cdot\left(a^2\cdot y\cdot a^2\right) \Leftrightarrow x\cdot(y\cdot x\cdot y\cdot x\cdot y\cdot x\cdot y\cdot x)\cdot y=x^5\cdot y^5 \Leftrightarrow$

$x\cdot(y\cdot x\cdot y\cdot x\cdot y\cdot x\cdot y\cdot x)\cdot y=x\cdot\left(x^4\cdot y^4\right)\cdot y \Leftrightarrow y\cdot x\cdot y\cdot x\cdot y\cdot x\cdot y\cdot x=x^4\cdot y^4,\ (\forall)x,y\in G$

În ultima egalitate, punând y=a^2,obţinem: $a^2xa^2xa^2xa^2x=x^4a^4 \Leftrightarrow \left(a^2xa^2\right)x\left(a^2xa^2\right)x=x^4 \Leftrightarrow x^5xx^5x=x^4$

$x^4x^8=x^4 \Leftrightarrow x^8=e,\ (\forall)x\in G.$

Problema 3. Să se calculeze $I=\int\frac{\sin x-x\cos x}{x^2-\sin^2 x}dx,\qquad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Prof. Dumbravă Vasile, L.E.R.,Galaţi.

Soluţie:

$$I=\int\frac{\sin x-x\cos x}{x^2-\sin^2 x}dx=\int\frac{\frac{\sin x-x\cdot\cos x}{\sin^2 x}}{\frac{x^2-\sin^2 x}{\sin^2 x}}dx=\int\frac{\left(\frac{x}{\sin x}\right)'}{\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2-1}dx=\frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{\frac{x}{\sin x}-1}{\frac{x}{\sin x}+1}\right|+C=$$

$$\frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{x-\sin x}{x+\sin x}\right|+C.$$

Problema 4. Fie $I_n=\int\limits_0^1\sqrt[n]{1+x+x^n}\cdot dx,\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 2.$

a). Să se calculeze I_2.

b). Să se arate că şirul $\left(I_n\right)_{n\geq 2}$ este convergent şi să se determine limita lui.

Conf. dr. Jenică Crînganu, Univ. Galaţi

Soluţie:

$$I_2=\int_0^1\sqrt{1+x+x^2}\,dx=\int_0^1\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}dx=\int_0^1\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}\,dx+\frac{3}{4}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}dx=$$

$$\int_0^1\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}\,dx+\frac{3}{4}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+x+x^2}\right)\Big|_0^1=$$

$$\int_0^1\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\sqrt{1+x+x^2}\right)'dx+\frac{3}{4}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+x+x^2}\right)\Big|_0^1=$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\sqrt{1+x+x^2}\right)\Big|_0^1-\int_0^1\sqrt{1+x+x^2}\,dx+\frac{3}{4}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+x+x^2}\right)\Big|_0^1=$$

$$\frac{3}{2}\cdot\sqrt{3}-\frac{1}{2}-I_2+\frac{3}{4}\ln\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)-\frac{3}{4}\ln\frac{3}{2}.$$

a). $I_2=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3\sqrt{3}-1}{2}+\frac{3}{4}\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right).$

b).

Pentru $x\in[0,1]$ şi $n\geq 2$, se obţine:

$$\left|\sqrt[n]{1+x+x^n}-\sqrt[n]{1+x}\right|=\left|\frac{x^n}{\left(\sqrt[n]{1+x+x^n}\right)^{n-1}+\left(\sqrt[n]{1+x+x^n}\right)^{n-2}\cdot\left(\sqrt[n]{1+x}\right)+\ldots+\left(\sqrt[n]{1+x}\right)^{n-1}}\right|\leq x^n,$$

de unde rezultă $\sqrt[n]{1+x}-x^n\leq\sqrt[n]{1+x+x^n}\leq\sqrt[n]{1+x}+x^n.$

Integrând aceste inegalităţi pe $[0,1]$, se obţine:

$$\frac{2^{\frac{1}{n}}+1}{\frac{1}{n}+1}-\frac{1}{\frac{1}{n}+1}-\frac{1}{n+1}\leq I_n\leq\frac{2^{\frac{1}{n}}+1}{\frac{1}{n}+1}-\frac{1}{\frac{1}{n}+1}+\frac{1}{n+1}.$$

Trecând la limita, se obţine: $I_n\to 1$

Olimpiada de Matematică –faza locală- Galaţi

14 februarie-2009

Clasa a VII-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

<table>
<tr><th>Nr. problemei</th><th>Soluţie, rezolvare</th><th>Punctaj</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1.</td><td>Ultima cifră a unui număr pătrat perfect aparţine mulţimii {0,1,4,5,6,9}.
Deci conform principiului cutiei există două dintre cele 7 cu aceeaşi ultimă cifră. Fie acestea a_m şi a_n (putem presupune $a_m>a_n$).
Numărul a_m-a_n are ultima cifră 0, deci $a_m-a_n=M_{10}\subset M_5$. (1)</td><td>3p</td></tr>
<tr><td>Fie $a_m=p^2$ şi $a_n=q^2$. Evident p, respectiv q, au parităţi egale cu a lui a_m, respectiv cu a lui a_n, deci p-q şi p+q sunt numere pare.
Rezultă că $a_m-a_n=p^2-q^2=(p-q)(p+q)=4\cdot k= M_4$ (2)
(p şi q sunt de aceeaşi paritate).
Din (1) şi (2) rezultă că $a_m-a_n=M_{20}$.</td><td>4p</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2.</td><td>$100 \le a \le 999 \Rightarrow 2109 \le a+2009 \le 3008.$ Punând condiţia ca numărul a+2009 să fie pătrat perfect, se obţine:
$a+2009 \in \{2116,\ 2209,\ 2304,\ 2401,\ 2500,\ 2601,\ 2704,\ 2809,\ 2916\}$.</td><td>3p</td></tr>
<tr><td>Aşadar, $\sqrt{a+2009} \in \{46,47,48,49,50,51,52,53,54\}$ şi
$a+\sqrt{a+2009} \in \{153,247,343,441,541,643,747,853,961\}$.Dar
$a+\sqrt{a+2009}$ trebuie să fie pătrat perfect. Rezultă că
$a+\sqrt{a+2009} \in \{441,961\}$. Obţinem că $\sqrt{a+\sqrt{a+2009}} \in \{21,31\}$ şi</td><td>4p</td></tr>
</table>

	$a+23+\sqrt{a+\sqrt{a+2009}}\in\{436,961\}$. Deoarece $\sqrt{436}\notin\mathbb{N}$ şi $\sqrt{961}=31\in\mathbb{N}$, rezultă că $\sqrt{a+23+\sqrt{a+\sqrt{a+2009}}}=31\Rightarrow a=907$	
3.	Construim paralelogramul MPQL $\Rightarrow ML\parallel PQ,\ [ML]\equiv[PQ]$. Dar $PQ\parallel NR$ şi $[PQ]\equiv[NR]$, rezultă că $ML\parallel NR,\ [ML]\equiv[NR]\Rightarrow$ MNRL paralelogram; $\left.\begin{array}{l}PQ\parallel ML\\ PQ\perp NP\end{array}\right\}\Rightarrow ML\perp NP\ (1)$ **a).** $\left.\begin{array}{l}LQ\parallel MP\\ RT\perp MP\end{array}\right\}\Rightarrow RT\perp LQ$ Analog, se demonstrează că $QT\perp LR$; $\left.\begin{array}{l}RT\perp LQ\\ QT\perp LR\end{array}\right\}\Rightarrow$ punctul T este ortocentrul triunghiului LRQ $\Rightarrow LT\perp RQ$; $\left.\begin{array}{l}LT\perp RQ\\ RQ\parallel NP\end{array}\right\}\Rightarrow LT\perp NP\ (2)$ *Din* (1) *şi* (2) $\Rightarrow$ punctele M,L,T sunt colineare $\Rightarrow MT\perp NP$.	**2p**
	b).Fie $ST\cap RQ=\{U\}$ $\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}RT\perp MP\\ SQ\perp MP\end{array}\right\}\Rightarrow RT\parallel SQ\\ \text{Analog, se demonstreaza ca } RS\parallel TQ\end{array}\right\}\Rightarrow$ RSQT paralelogram $\Rightarrow$ punctul U este mijlocul diagonalelor : $[RU]\equiv[UQ]$; In triunghiul MTS : $\left\{\begin{array}{l}[OM]\equiv[OS]\\ [UR]\equiv[US]\end{array}\right.\Rightarrow[OU]$ este linie mijlocie $\Rightarrow OU\parallel MT$; $\left.\begin{array}{l}OU\parallel MT\\ MT\perp NP\end{array}\right\}\Rightarrow OU\perp NP$; $\left.\begin{array}{l}[RU]\equiv[UQ]\\ OU\perp RQ\end{array}\right\}\Rightarrow$ OU este mediatoarea segmentului $[NP]\Rightarrow$ $O\in$ mediatoarei segmentului $[NP]$	**3p**

	c). Punctul O este centrul dreptunghiului NPQR $\Rightarrow$ OU=$\frac{1}{2}\cdot PQ$; Dar $[PQ]\equiv[ML]$ $\Rightarrow$ OU=$\frac{1}{2}\cdot$ML; *Cum* $[OU]$ este linie mijlocie în triunghiul MTS $\Rightarrow OU=\frac{1}{2}\cdot MT$; $\left.\begin{array}{l}\text{OU}=\frac{1}{2}\cdot\text{ML}\\ OU=\frac{1}{2}\cdot MT\end{array}\right\}\Rightarrow$ punctele L şi T coincid : $L=T\Rightarrow RL\perp MP$; $\left.\begin{array}{l}RL\perp MP\\ RL \parallel MN\end{array}\right\}\Rightarrow$ MN $\perp$ MP $\Rightarrow\triangle$MNP este dreptunghic.	**2p**
4.	Cazuri: I) AD‖BC$\Rightarrow$ABCD paralelogram şi inegalitatea este adevarată(devine egalitate) pentru că EF=AB=CD.	**1p**
	$\left.\begin{array}{l}EO\parallel AB\Rightarrow\triangle DEO\sim\triangle DAB\Leftrightarrow\frac{EO}{AB}=\frac{DO}{DB}\\ FO\parallel AB\Rightarrow\triangle CFO\sim\triangle CBA\Leftrightarrow\frac{OF}{AB}=\frac{CO}{AC}\\ DC\parallel AB\Rightarrow\triangle DOC\sim\triangle BOA\Leftrightarrow\frac{DO}{OB}=\frac{CO}{AO}\Leftrightarrow\frac{DO}{DB}=\frac{CO}{AC}\end{array}\right\}\Rightarrow[EO]\equiv[OF]$	**2p**
	$EO\parallel CD\Rightarrow\triangle AEO\sim\triangle ADC\Leftrightarrow\frac{EO}{DC}=\frac{AO}{AC}$ $\frac{EO}{AB}+\frac{EO}{DC}=\frac{DO}{DB}+\frac{AO}{AC}=\frac{CO}{AC}+\frac{AO}{AC}=1\Rightarrow EO=\frac{AB\cdot CD}{AB+CD}$ $EF=2\cdot EO=\frac{2\cdot AB\cdot CD}{AB+CD}$.	**2p**
	EF= $\frac{2\cdot AB\cdot CD}{AB+CD}$ este media armonică între AB şi CD şi conform inegalităţii mediilor $\Rightarrow$ EF$\leq\sqrt{AB\cdot CD}$.	**2p**

Olimpiada de Matematică –faza locală- Galaţi

14 februarie-2009

Clasa a VIII-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluţie, rezolvare**	**Punctaj**
1.	Fie două elemente egale din mulţimea M: $a = n^2 - 18\cdot n,\ b = m^2 - 18\cdot m,\ m,n \in \mathbb{N},\ m \neq n.$ $a = b \Rightarrow n^2 - 18\cdot n = m^2 - 18\cdot m \Leftrightarrow (m-n)\cdot(m+n-18) = 0.$ *Dar* m ≠ n. Atunci m+n-18=0 ⇒ m+n=18, $m,n \in \mathbb{N},\ m \neq n$	**4p**
	Dacă $m = 0 \Rightarrow n = 18$ $m = 1 \Rightarrow n = 17$ .... $m = 8 \Rightarrow n = 10$ Deci 9 elemente din cele 2009 din mulţimea M se repetă. În concluzie, card M=2000**.**	**3p**
2.	$a^2 - 4\cdot\lvert a\rvert + 4 + b^2 - 6\cdot\lvert b\rvert + 9 + c^2 - 10\cdot\lvert c\rvert + 25 = 0$ $\Leftrightarrow (\lvert a\rvert - 2)^2 + (\lvert b\rvert - 3)^2 + (\lvert c\rvert - 5)^2 = 0 \Leftrightarrow \lvert a\rvert = 2 \Leftrightarrow a = \pm 2$ $\lvert b\rvert = 3 \Leftrightarrow b = \pm 3;$ $\lvert c\rvert = 5 \Leftrightarrow c = \pm 5$	**3p**
	Soluţii: {(2,3,5), (2,3,-5), (2,-3,5), (-2,3,5), (2,-3,-5), (-2,3,-5), (-2,-3,5), (-2,-3,-5)}. Sunt 8 soluţii.	**1p**
	Se aplică inegalitatea $\sqrt{x} + \sqrt{y} \le 2\sqrt{\frac{x+y}{2}},\ (\forall)\, x, y \ge 0$, Deci $\sqrt{3\cdot a+1} + \sqrt{5\cdot b+2} < 2\cdot\sqrt{\frac{3\cdot a+1+5\cdot b+2}{2}} = 2\cdot\sqrt{\frac{4}{2}} = 2\sqrt{2}$	**3p**

3.	Se foloseşte inegalitatea: $\frac{a_1^2+a_2^2}{a_1+a_2} \geq \frac{a_1+a_2}{2} \Leftrightarrow 2\cdot a_1^2+2\cdot a_2^2 \geq a_1^2+a_2^2+2\cdot a_1\cdot a_2 \Leftrightarrow$ $(a_1-a_2)^2 \geq 0, \quad (\forall)a_1,a_2>0$	**3p**
	$\frac{a_1^2+a_2^2}{a_1+a_2} \geq \frac{a_1+a_2}{2}$ $\frac{a_2^2+a_3^2}{a_2+a_3} \geq \frac{a_2+a_3}{2}$ . ... $\frac{a_{2009}^2+a_1^2}{a_{2009}+a_1} \geq \frac{a_{2009}+a_1}{2}$ Prin adunarea inegalităţilor, se obţine: $\frac{a_1^2+a_2^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2+a_3^2}{a_2+a_3}+...+\frac{a_{2009}^2+a_1^2}{a_{2009}+a_1} \geq \frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_2+a_3}{2}+...+\frac{a_{2009}+a_1}{2}$. Dar $a_1+a_2+...+a_{2009}=2009$, rezulta că $\frac{a_1^2+a_2^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2+a_3^2}{a_2+a_3}+...+\frac{a_{2009}^2+a_1^2}{a_{2009}+a_1} \geq 2009$	**4p**
4.	Se demonstrează că punctul $P \in AC$ $\left.\begin{array}{l} M\in(VA)\Rightarrow M\in(VAC) \\ N\in(VC)\Rightarrow N\in(VAC) \end{array}\right\} \Rightarrow MN\subset(VAC);$ $\left.\begin{array}{l} MN\subset(VAC) \\ P\in MN \end{array}\right\} \Rightarrow P\in(VAC)$ $\left.\begin{array}{l} P\in(VAC) \\ P\in(ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow P\in(VAC)\cap(ABC)\Rightarrow P\in(AC)$	**1p**

	$\triangle VAB:\ [BM - bisectoarea\ \measuredangle(VBA) \xrightarrow{T.bis} \frac{VM}{AM}=\frac{VB}{AB}$ $\triangle VBC:\ [BN - bisectoarea\ \measuredangle(VBC) \xrightarrow{T.bis} \frac{VN}{NC}=\frac{VB}{BC}$ $\triangle VAC:\ M,N,P$ sunt coliniare $\xrightarrow{T.Menelaus} \frac{VM}{AM}\cdot\frac{PA}{PC}\cdot\frac{NC}{NV}=1 \Rightarrow \frac{VB}{AB}\cdot\frac{PA}{PC}\cdot\frac{BC}{VB}=1 \Rightarrow$ $\frac{PA}{PC}\cdot\frac{BC}{AB}=1$ Dar $[BC]\equiv[AC]$.Rezulta $\frac{PA}{PC}\cdot\frac{AC}{AB}=1;$ $\triangle ABC:\ [AF - bisectoarea\measuredangle(BAC) \xrightarrow{T.bis.} \frac{AC}{AB}=\frac{CF}{FB}$ $Deci\ \frac{PA}{PC}\cdot\frac{CF}{FB}=1$ $\triangle ABC:$ P,F,E coliniare $\xrightarrow{T.Menelaus} \frac{PA}{PC}\cdot\frac{EB}{EA}\cdot\frac{CF}{FB}=1 \Rightarrow \frac{EB}{EA}=1 \Rightarrow [EA]=[EB](1);$ $\triangle VBE:\ [BQ - bisectoarea\measuredangle(VBE) \xrightarrow{T.bis.} \frac{VB}{BE}=\frac{VQ}{QE} \Rightarrow BE=\frac{VB\cdot QE}{VQ}(2)$ $\triangle AEC:\ [AJ - bisectoarea\measuredangle(EAC) \xrightarrow{T.bis.} \frac{AE}{EC}=\frac{EJ}{JC} \Rightarrow AE=\frac{AC\cdot EJ}{JC}(3)$ $\left.\begin{array}{l} Din\ 1,2,3 \Rightarrow \frac{VB\cdot QE}{VQ}=\frac{AC\cdot EJ}{JC} \\ Dar\ [VB]=[AC] \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{QE}{VQ}=\frac{EJ}{JC} \xrightarrow{R.Th.Tales} QJ \parallel VC$	**5p**
	$\left.\begin{array}{l} QJ \parallel VC \\ VC \subset (VAC) \end{array}\right\} \Rightarrow QJ \parallel (VAC)$	**1p**

Olimpiada de Matematică –faza locală- Galaţi

14 februarie-2009

Clasa a X-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluţie, rezolvare**	**Punctaj**
1.	$(\forall)\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \sin\alpha>0,\ \cos\alpha>0$; Se logaritmeză natural inegalitatea din enunţ şi se obţine: $\sin\alpha\cdot\ln(\sin\alpha)+\cos\alpha\cdot\ln(\cos\alpha)+(\sin\alpha+\cos\alpha)\cdot\ln(\sin\alpha+\cos\alpha)\leq 0$, $(\forall)\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow$ $\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}\cdot\ln(\sin\alpha)+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}\cdot\ln(\cos\alpha)\leq-\ln(\sin\alpha+\cos\alpha)$	**3p**
	Aplicând inegalitatea lui Jensen funcţiei concave $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln x$, obţinem: $f\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}\cdot\sin\alpha+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}\cdot\cos\alpha\right)\geq$ $\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}f(\sin\alpha)+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}\cdot f(\cos\alpha)\Leftrightarrow$ inegalitatea propusă	**4p**
2.	$\{x\}\in[0,1),\ (\forall)x\in\mathbb{R}\Rightarrow\begin{cases}\arcsin\{x\}\geq 0,\ (\forall)x\in\mathbb{R}\\ \arccos\{x\}\geq 0,\ (\forall)x\in\mathbb{R}\end{cases}\Rightarrow$ $\arcsin\{x\}\cdot\arccos\{x\}>0,\ (\forall)x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$	**1p**
		4p

	$\left.\begin{array}{l} x-[x]=\{x\},(\forall)x\in\mathbb{R}\\ arctg\ y+arcctg\ y=\frac{\pi}{2},\ (\forall)y\in\mathbb{R}\end{array}\right\}\Rightarrow \log_{\frac{\pi}{2}}\left(\arcsin\{x\}\cdot\arccos\{x\}\right)=\frac{2}{\log_{\frac{\pi}{4}}\frac{\pi}{2}}\Leftrightarrow$ $\log_{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\arcsin\{x\}\cdot\arccos\{x\}}=\log_{\frac{\pi}{2}}\frac{\arcsin\{x\}+\arccos\{x\}}{2}\Leftrightarrow \arcsin\{x\}=\arccos\{x\}\Leftrightarrow$	
	$\{x\}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}+k\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}\subset\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ *Obs.* $\arcsin z+\arccos z=\frac{\pi}{2},\ (\forall)z\in[-1,1]$	**2p**
3.	$\left.\begin{array}{l}\text{Fie } a,b\in\mathbb{R},\ a+b>0;\\ (a-b)^2\geq 0,\ (\forall)\ a,b\in\mathbb{R}\end{array}\right\}\Rightarrow (a-b)^2(a+b)\geq 0\Leftrightarrow\left(a^2-b^2\right)(a-b)\geq 0\Leftrightarrow$ $a^3+b^3\geq a^2b+ab^2\quad(1)$	**3p**
	Inegalitatea din enunţ devine: $2\left(\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{x^3}\right)\geq\frac{x^2}{y\cdot z}+\frac{y^2}{x\cdot z}+\frac{z^2}{x\cdot y}+3$. Folosind inegalitatea (1), se obţine: $2\left(\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{x^3}\right)=\left(\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{z^3}\right)+\left(\frac{x^3}{y^3}+\frac{z^3}{x^3}\right)+\left(\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{x^3}\right)\geq$ $\frac{x^2}{y^2}\cdot\frac{y}{z}+\frac{x}{y}\cdot\frac{y^2}{z^2}+\frac{x^2}{y^2}\cdot\frac{z}{x}+\frac{x}{y}\cdot\frac{z^2}{x^2}+\frac{y^2}{z^2}\cdot\frac{z}{x}+\frac{y}{z}\cdot\frac{z^2}{x^2}=$ $\frac{x^2}{y\cdot z}+\frac{x\cdot y}{z^2}+\frac{x\cdot z}{y^2}+\frac{z^2}{x\cdot y}+\frac{y^2}{x\cdot z}+\frac{y\cdot z}{x^2}\geq\frac{x^2}{y\cdot z}+\frac{z^2}{x\cdot y}+\frac{y^2}{x\cdot z}+3$, deoarece $\frac{x\cdot y}{z^2}+\frac{x\cdot z}{y^2}+\frac{y\cdot z}{x^2}\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{x\cdot y}{z^2}\cdot\frac{x\cdot z}{y^2}\cdot\frac{y\cdot z}{x^2}}=3,\ (\forall)x,\ y,\ z\in(0,\infty)$	**4p**
4.	$\lvert z\rvert+\lvert z-2009\rvert=\lvert z\rvert+\lvert 2009-z\rvert\geq\lvert z+2009-z\rvert=2009$, cu egalitate atunci când $M(z)\in[A_0A_{2009}]$, unde A_i are afixul i, $i\in\{0,1,2,3,...,2009\}$. Aşadar, egalitatea are loc pentru $z\in R$, $z\in[0,2009]$. Anolog $\lvert z-1\rvert+\lvert z-2008\rvert=\lvert z-1\rvert+\lvert 2008-z\rvert\geq\lvert z-1+2008-z\rvert=2007$, cu egalitate pentru $z\in\mathbb{R}$, $z\in[1,2007]$; *Succesiv*, $\lvert z-2\rvert+\lvert z-2007\rvert\geq 2005$, cu egalitate pentru $z\in\mathbb{R}$, $z\in[2,2005]$ .... $\lvert z-1004\rvert+\lvert z-1005\rvert\geq 1$, cu egalitate pentru $z\in[1004,1005]$;	**4p**
	Adunând aceste inegalităţi, obţinem: $\lvert z\rvert+\lvert z-1\rvert+\lvert z-2\rvert+...+\lvert z-2009\rvert\geq 2009+2007+2005+...+3+1=1005^2$ adică are loc egalitatea în toate cele 1005 cazuri. Soluţia ecuaţiei este: $z\in\mathbb{R},\ z\in[1004,1005]$	**3p**

Olimpiada de Matematică –faza locală- Galaţi

14 februarie-2009

Clasa a XI-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluţie, rezolvare**	**Punctaj**
1.	Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \mathrm{f}(x)=\det(A+x\cdot B)-\det(x\cdot A+B), A,B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R});$ După calcule, se obţine $f(x)=\alpha\cdot x^2+\beta\cdot x+\gamma,\ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R};$	**3p**
	Din ipoteză se obţine: $f(2008)=f(2009)=f(1)=0,$ adică ecuaţia de grad cel mult doi, $f(x)=0$ are trei rădăcini reale distincte. Rezultă că f este funcţia nulă: $f(x)=0,\ (\forall)x\in\mathbb{R}.$ Aşadar, pentru $x=0\Rightarrow f(0)=0\Rightarrow \det A=\det B.$	**4p**
2.	$"\Rightarrow"$. Presupunem că $\det\left(a\cdot X^2+b\cdot X+c\cdot I_2\right)\geq 0,\ (\forall)X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$ Pentru $X=\begin{pmatrix}0 & x\\ 1 & 0\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R},$ obţinem $\det\left(a\cdot X^2+b\cdot X+c\cdot I_2\right)=\det\left(a\cdot\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}+b\cdot\begin{pmatrix}0 & x\\ 1 & 0\end{pmatrix}+c\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=$ $\det\begin{pmatrix}ax+c & bx\\ b & ax+c\end{pmatrix}=(ax+c)^2-b^2x\geq 0,\ (\forall)x\in\mathbb{R},$ adică $a^2\cdot x^2+\left(2\cdot a\cdot c-b^2\right)\cdot x+c^2\geq 0,\ (\forall)x\in\mathbb{R},$	**3p**

	condiţie echivalentă cu $\left(2\cdot a\cdot c-b^2\right)^2-4\cdot a^2\cdot c^2\le 0\Leftrightarrow b^4-4\cdot a\cdot c\cdot b^2\le 0\Leftrightarrow$ $b^2\left(b^2-4\cdot a\cdot c\right)\le 0,$ de unde rezultă că $b^2-4\cdot a\cdot c\le 0.$ $"\Leftarrow"$. Să demonstram că dacă $X\in\mathcal{M}_n\left(\mathbb{R}\right),$ $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$ şi $k\ge 0$ atunci $\det\left(X^2+k\cdot I_n\right)\ge 0.$ Intr-adevăr, $\det\left(X^2+k\cdot I_n\right)=\det\left(X+i\sqrt{k}I_n\right)\cdot\det\left(X-i\sqrt{k}I_n\right)=$ $\det\left(X+i\sqrt{k}I_n\right)\cdot\det\left(\overline{X+i\sqrt{k}I_n}\right)=\det\left(X+i\sqrt{k}I_n\right)\cdot\overline{\det\left(X+i\sqrt{k}I_n\right)}=$ $\left\lvert\det\left(X+i\sqrt{k}I_n\right)\right\rvert^2\ge 0.$	
	Presupunem că $b^2-4ac\le 0$ şi fie $X\in\mathcal{M}_2\left(\mathbb{R}\right)$. $a\cdot X^2+b\cdot X+c\cdot I_2=a\cdot\left[\left(X+\dfrac{b}{2a}\cdot I_2\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a^2}\cdot I_2\right]=a\cdot\left(Y^2+k\cdot I_2\right),$ *unde* $Y=X+\dfrac{b}{2a}\cdot I_2,$ $k=\dfrac{4ac-b^2}{4a^2}\ge 0.$ *Atunci*, $\det\left(a\cdot X^2+b\cdot X+c\cdot I_2\right)=\det\left[a\cdot\left(Y^2+k\cdot I_2\right)\right]=$ $a^2\cdot\det\left(Y^2+k\cdot I_2\right)\ge 0.$	**4p**
3.	$"\Leftarrow"$. Dacă $\alpha\in\mathbb{Z}$, rezultă $x_n=0,$ $\left(\forall\right)n\in\mathbb{N}$ şi evident $\left(x_n\right)_{n\ge 0}$ e convergent	**3p**
	$"\Rightarrow"$. Presupunem că $\left(x_n\right)_{n\ge 0}$ este convergent şi fie $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x\in\mathbb{R}.$ Atunci $x_{n+1}-x_n\to 0.$ Cum $x_{n+1}-x_n=\left\{(n+1)\cdot\alpha\right\}-\left\{n\cdot\alpha\right\}=$ $(n+1)\cdot\alpha-\left[(n+1)\cdot\alpha\right]-n\alpha+\left[n\alpha\right]=\alpha-y_n,$ unde $y_n=\left[(n+1)\cdot\alpha\right]-\left[n\cdot\alpha\right]\in\mathbb{Z},$ rezultă că $\alpha\text{-}y_n\to 0,$ deci $y_n\to\alpha$.Dar $\left(y_n\right)_{n\ge 0}$ este un şir cu termeni întregi $\Rightarrow\alpha$	**4p**
4.	Notăm limita data cu L. $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^{2008}(x)-arctg^{2008}(x)}{x^{2009}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-arctgx}{x^2}\cdot\dfrac{1}{x^{2007}}\sum\limits_{k=0}^{2007}tg^{2007-k}(x)\cdot arctg^k x=$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-arctgx}{x^2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\sum\limits_{k=0}^{2007}\left(\dfrac{tgx}{x}\right)^{2007-k}\cdot\left(\dfrac{\text{arctgx}}{x}\right)^k=L_1\cdot L_2,$ unde $L_1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-arctgx}{x^2}$ si $L_2=\lim\limits_{x\to 0}\sum\limits_{k=0}^{2007}\left(\dfrac{tgx}{x}\right)^{2007-k}\cdot\left(\dfrac{\text{arctgx}}{x}\right)^k.$	**2p**

	Deoarece $\sin x \le x,\ (\forall)\, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - \{0\}$, avem $0 \le \left\lvert \frac{tgx - x}{x^2} \right\rvert \le \left\lvert \frac{tgx - \sin x}{x^2} \right\rvert \le \left\lvert \frac{tgx \cdot (1-\cos x)}{x^2} \right\rvert = \left\lvert \frac{tgx \cdot \left(2\sin^2 \frac{x}{2}\right)}{x^2} \right\rvert$, pentru x $\in \left(-\right.$ Cum $\lim\limits_{x\to 0} \left\lvert \frac{tgx \cdot \left(2\sin^2 \frac{x}{2}\right)}{x^2} \right\rvert = \left\lvert \frac{1}{2} \lim\limits_{x\to 0} tgx \cdot \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \right\rvert = \left\lvert \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 1^2 \right\rvert = 0$, rezultă	**3p**
	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{tgx - x}{x^2} = 0.$ Notăm arctgx=y $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - arctgx}{x^2} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{tgy - y}{tg^2 y} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{tgy - y}{y^2} \cdot \lim\limits_{y\to 0} \frac{y^2}{tg^2 y} = 0 \cdot 1 = 0.$ $L_1 = 0.$ $L_2 = \lim\limits_{x\to 0} \sum\limits_{k=0}^{2007} \left(\frac{tgx}{x}\right)^{2007-k} \cdot \left(\frac{\text{arctgx}}{x}\right)^k = \sum\limits_{k=0}^{2007} \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{tgx}{x}\right)^{2007-k} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{arctgx}{x}\right)^k =$ $\sum\limits_{k=0}^{2007} 1 \cdot 1 = 2008.$ $L = L_1 \cdot L_2 = 0 \cdot 2008 = 0$	**2p**

Olimpiada de Matematică –faza locală- Galaţi

14 februarie-2009

Clasa a XII-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
-

<table>
<tr><th>Nr. problemei</th><th>Soluţie, rezolvare</th><th>Punctaj</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1.</td><td>Din calcul se obţine:
$x*y=k+(x-k)^{\log_a(y-k)}$, x,y $\in G=(k,\ \infty)-\{k+1\},\ k>0$
a). Din $e\in G$ element neutru $\Rightarrow$ x $*$ e=e $*\, x=x, (\forall)\, x\in G$
x $*$ e=$x \Leftrightarrow k+(x-k)^{\log_a(e-k)}=x \Leftrightarrow (x-k)^{\log_a(e-k)}=x-k \Leftrightarrow$
$\log_a(e-k)=1 \Leftrightarrow e-k=a \Leftrightarrow e=k+a\in G.$
$k+a=2009$, k,a $\in \mathbb{Z}$, k>0 $\Rightarrow$
$(k,a)\in\{(1,2008),\ (2,2007),\ (3,2006),\ ...,(2008,1)\}.$
Numărul de perechi este 2008.</td><td>3p</td></tr>
<tr><td>b). se verifică asociativitatea;
k=1005, a=1004
$x*x'=e \Leftrightarrow x'=k+a^{\frac{\log_a(e-k)}{\log_a(x-k)}}\in G$
Pentru x=x' obţinem: $\log_{1004}^2(x-1005)=1 \Rightarrow$
1). $\log_{1004}(x-1005)=1 \Rightarrow x_1=2009\in G$
2). $\log_{1004}(x-1005)=-1 \Rightarrow x_2=1005+\frac{1}{1004}\in G$</td><td>2p</td></tr>
<tr><td>c).
Fie $f:\mathbb{R}-\{0\}\to G,\ f(x)=k+a^x, k>0$
Se verifică că funcţia f este izomorfism de grupuri.
y=1 este asimptotă orizontală spre - ∞ $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}(k+a^x)=1 \Leftrightarrow k=1;$
$f(1)=2010 \Leftrightarrow 1+a=2010 \Leftrightarrow a=2009.$
$f(x)=1+2009^x,\ x\in\mathbb{R}-\{0\}.$</td><td>3p</td></tr>
</table>

2.	Pentru x=e, relaţia din enunţ se scrie: $a^2\cdot e^5\cdot a^2=e\Leftrightarrow a^2\cdot e\cdot a^2=e\Leftrightarrow a^4=e.$	**2p**
	Prin compunere la stânga şi la dreapta cu a^2, relaţia din ipoteză devine $a^2\cdot\left(a^2\cdot x^5\cdot a^2\right)\cdot a^2=a^2\cdot x\cdot a^2\Leftrightarrow a^4\cdot x^5\cdot a^4=a^2\cdot x\cdot a^2\Leftrightarrow$ $x^5=a^2\cdot x\cdot a^2,\ (\forall)x\in G\quad(1)$	**2p**
	Înlocuind în relaţia (1) pe x cu $x\cdot y,$ unde $x,y\in G$ sunt arbitrare, obţ inem: $(x\cdot y)^5=a^2\cdot(x\cdot y)\cdot a^2\Leftrightarrow$ $(x\cdot y)\cdot(x\cdot y)\cdot(x\cdot y)\cdot(x\cdot y)\cdot(x\cdot y)=a^2\cdot\left(x\cdot a^4\cdot y\right)\cdot a^2\Leftrightarrow$ $x\cdot(y\cdot x\cdot y\cdot x\cdot y\cdot x\cdot y\cdot x)\cdot y=\left(a^2\cdot x\cdot a^2\right)\cdot\left(a^2\cdot y\cdot a^2\right)\Leftrightarrow$ $x\cdot(y\cdot x\cdot y\cdot x\cdot y\cdot x\cdot y\cdot x)\cdot y=x^5\cdot y^5\Leftrightarrow$ $x\cdot(y\cdot x\cdot y\cdot x\cdot y\cdot x\cdot y\cdot x)\cdot y=x\cdot\left(x^4\cdot y^4\right)\cdot y\Leftrightarrow$ $y\cdot x\cdot y\cdot x\cdot y\cdot x\cdot y\cdot x=x^4\cdot y^4,\ (\forall)x,y\in G$ În ultima egalitate, punând y=a^2,obţinem: $\mathrm{a}^2xa^2xa^2xa^2x=x^4a^4\Leftrightarrow$ $\left(\mathrm{a}^2xa^2\right)x\left(\mathrm{a}^2xa^2\right)x=x^4\Leftrightarrow x^5xx^5x=x^4$ $x^4x^8=x^4\Leftrightarrow x^8=e,\ (\forall)x\in G.$	**3p**
3.	$I=\int\frac{\sin x-x\cos x}{x^2-\sin^2 x}dx=\int\frac{\frac{\sin x-x\cdot\cos x}{\sin^2 x}}{\frac{x^2-\sin^2 x}{\sin^2 x}}dx=$	**3p**
	$=\int\frac{\left(\frac{x}{\sin x}\right)'}{\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2-1}dx=\frac{1}{2}\cdot\ln\left\|\frac{\frac{x}{\sin x}-1}{\frac{x}{\sin x}+1}\right\|+C=\frac{1}{2}\cdot\ln\left\|\frac{x-\sin x}{x+\sin x}\right\|+C.$	**5p**
4.	**a).**	**3p**

$$I_2=\int_0^1\sqrt{1+x+x^2}\,dx=\int_0^1\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}dx=\int_0^1\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}dx+\frac{3}{4}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}dx=$$

$$\int_0^1\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}dx+\frac{3}{4}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+x+x^2}\right)\Big|_0^1=$$

$$\int_0^1\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\sqrt{1+x+x^2}\right)'dx+\frac{3}{4}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+x+x^2}\right)\Big|_0^1=$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\sqrt{1+x+x^2}\right)\Big|_0^1-\int_0^1\sqrt{1+x+x^2}\,dx+\frac{3}{4}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+x+x^2}\right)\Big|_0^1=$$

$$\frac{3}{2}\cdot\sqrt{3}-\frac{1}{2}-I_2+\frac{3}{4}\ln\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)-\frac{3}{4}\ln\frac{3}{2}.$$

$$I_2=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3\sqrt{3}-1}{2}+\frac{3}{4}\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right).$$

b). Pentru $x\in[0,1]$ şi $n\ge 2$, se obţine: **2p**

$$\left|\sqrt[n]{1+x+x^n}-\sqrt[n]{1+x}\right|=\left|\frac{x^n}{\left(\sqrt[n]{1+x+x^n}\right)^{n-1}+\left(\sqrt[n]{1+x+x^n}\right)^{n-2}\cdot\left(\sqrt[n]{1+x}\right)+\ldots+\left(\sqrt[n]{1+x}\right)^{n-1}}\right|\le x^n,$$

de unde $\sqrt[n]{1+x}-x^n\le\sqrt[n]{1+x+x^n}\le\sqrt[n]{1+x}+x^n$.

Integrând aceste inegalitaţi pe $[0,1]$, se obţine:

$$\frac{2^{\frac{1}{n}}+1}{\frac{1}{n}+1}-\frac{1}{\frac{1}{n}+1}-\frac{1}{n+1}\le I_n\le\frac{2^{\frac{1}{n}}+1}{\frac{1}{n}+1}-\frac{1}{\frac{1}{n}+1}+\frac{1}{n+1}.$$

Trecând la limita, se obţine: $I_n\to 1$