

**FIȘĂ PREGĂTIRE nr.3**

**PROBLEMA NR. 1/FIȘA NR.3 (OLM ARAD 2019)**

În interiorul unghiului  $\sphericalangle AOB$  având măsura de  $108^{\circ}$ , considerăm punctul  $P$  și notăm cu  $a = m(\sphericalangle AOP)$ ,  $b = m(\sphericalangle BOP)$ .

a) Aflați  $a$  și  $b$ , dacă  $17 \cdot a - 19 \cdot b = 18^{\circ}$ .

b) Fie  $M \in Int(\sphericalangle AOP)$ ,  $N \in Int(\sphericalangle POB)$  astfel încât  $m(\sphericalangle BOM) = 5 \cdot m(\sphericalangle AOM)$ ,

$m(\sphericalangle BON) = \frac{1}{5} \cdot m(\sphericalangle AON)$ . Arătați că  $\sphericalangle AOB$  și  $\sphericalangle MON$  au aceeași bisectoare.

**PROBLEMA NR. 2/FIȘA NR.3 (OLM ARAD 2019)**

Se consideră unghiurile  $AOB$ ,  $BOC$  și  $BOD$  astfel încât  $\sphericalangle AOB$  și  $\sphericalangle BOC$  sunt adiacente suplementare, iar  $\sphericalangle AOB$  și  $\sphericalangle BOD$  sunt neadiacente complementare. Dacă  $m(\sphericalangle COD) = 135^{\circ}$ , determinați măsura  $\sphericalangle AOB$ .

**PROBLEMA NR. 3/FIȘA NR.3 (OLM ARGES 2019)**

Fie unghiurile adiacente suplementare  $AOB$  și  $BOC$  astfel încât raportul lor să fie egal cu  $\frac{1}{4}$ . Fie  $OD$  semidreapta opusă bisectoarei unghiului  $BOC$ . În interiorul  $COD$  se consideră punctele  $M$  și  $N$  astfel încât unghiurile  $CON$ ,  $DOM$  și dublul unghiului  $MON$  să fie congruente și să depășească  $45^\circ$ .

a) Aflați măsura unghiului  $COD$ ;

**(3p)**

b) Demonstrați că punctele  $B, O, M$  sunt coliniare.

**(4p)**

Prof. Adrian Gobej, Curtea de Argeș

**PROBLEMA NR. 4/FIȘA NR.3 (OLM ARGES 2019)**

În interiorul segmentului  $AB = 160$  cm se consideră punctele C și D astfel încât

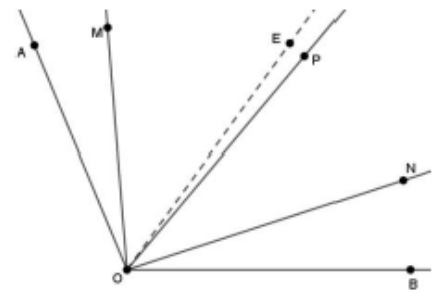
$$3 \cdot AC = 2 \cdot BC \text{ și } 5 \cdot AD = 3 \cdot BD.$$

- a) Calculați lungimea segmentelor AC și BD;
- b) Stabiliți ordinea punctelor A, B, C, D.

**(5p)**

**(2p)**

GM.10/2015



**Soluție:**

a) Din faptul că  $P$  este un punct interior  $\sphericalangle AOB$  avem  $m(\sphericalangle AOP) + m(\sphericalangle BOP) = m(\sphericalangle AOB)$  de unde deducem că  $a + b = 108^\circ$ , (1). Cum  $17 \cdot a - 19 \cdot b = 18^\circ$  avem că

$$18 \cdot a - a - 18 \cdot b - b = 18^\circ \Leftrightarrow 18 \cdot (a - b) = 18^\circ + a + b,$$

de unde deducem  $a - b = 7^\circ$ , (2). Adunând relațiile (1) și (2), membru cu membru, obținem  $2 \cdot a = 115^\circ \Rightarrow a = 57^\circ 30'$  și  $b = 108^\circ - 57^\circ 30' = 50^\circ 30'$ .

b) Notăm  $m(\sphericalangle AOM) = x$ . Din  $m(\sphericalangle BOM) = 5 \cdot m(\sphericalangle AOM) = 5 \cdot x$  și  $M \in \text{Int}(\sphericalangle AOP)$  avem  $m(\sphericalangle AOB) = m(\sphericalangle AOM) + m(\sphericalangle BOM) = x + 5 \cdot x = 6 \cdot x$ . Rezultă că  $6 \cdot x = 108^\circ$ , adică  $x = 18^\circ$  de unde  $m(\sphericalangle AOM) = 18^\circ$ .

Notăm  $m(\sphericalangle BON) = y$ . Din  $m(\sphericalangle BON) = \frac{1}{5} \cdot m(\sphericalangle AON) \Leftrightarrow 5 \cdot m(\sphericalangle BON) = m(\sphericalangle AON)$ ,

adică  $m(\sphericalangle AON) = 5 \cdot y$  și cum  $N \in \text{Int}(\sphericalangle POB)$  avem

$$m(\sphericalangle AOB) = m(\sphericalangle AON) + m(\sphericalangle BON) = 5 \cdot y + y = 6 \cdot y$$

Rezultă că  $6 \cdot y = 108^\circ$ , adică  $y = 18^\circ$  de unde  $m(\sphericalangle BON) = 18^\circ$ .

Fie  $[OE]$  bisectoare  $\sphericalangle AOB$ . Avem că  $m(\sphericalangle AOE) = m(\sphericalangle EOB) = m(\sphericalangle AOB):2 = 54^\circ$ .

$$\left. \begin{array}{l} m(\sphericalangle MOE) = m(\sphericalangle AOE) - m(\sphericalangle AOM) = 54^\circ - 18^\circ = 36^\circ \\ m(\sphericalangle NOE) = m(\sphericalangle BOE) - m(\sphericalangle BON) = 54^\circ - 18^\circ = 36^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow m(\sphericalangle MOE) = m(\sphericalangle NOE).$$

Avem că  $E \in \text{Int}(\sphericalangle MON)$  și  $\sphericalangle MOE \equiv \sphericalangle NOE$  de unde rezultă că  $[OE]$  este bisectoarea  $\sphericalangle MON$ . Deducem că  $\sphericalangle AOB$  și  $\sphericalangle MON$  au aceeași bisectoare.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Figura corespunzătoare problemei .....	1p
a) Deduce relațiile $a + b = 108^\circ$ și $a - b = 7^\circ$ .....	1p
Determină $a = 57^\circ 30'$ și $b = 50^\circ 30'$ .....	1p
b) Deduce $m(\sphericalangle AOM) = 18^\circ$ .....	1p
Deduce $m(\sphericalangle BON) = 18^\circ$ .....	1p
Argumentează că $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle MON$ au aceeași bisectoare .....	2p

**BAREM PROBLEMA NR. 2/FIȘA NR.3(OLM ARAD 2019)**

Fie  $m(\sphericalangle AOB) = a$ ,  $m(\sphericalangle BOC) = b$  și  $m(\sphericalangle BOD) = c$ .

Din faptul că  $\sphericalangle AOB$  și  $\sphericalangle BOC$  sunt adiacente suplementare, avem

$$m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOC) = a + b = 180^0, (1).$$

Din faptul că  $\sphericalangle AOB$  și  $\sphericalangle BOD$  sunt neadiacente complementare avem

$$m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOD) = a + c = 90^0, (2)$$

și că  $\sphericalangle AOB$  și  $\sphericalangle BOD$  sunt ascuțite ( $< 90^0$ ).

Se disting două cazuri:

**Cazul I: [OD este inclusă în interiorul  $\sphericalangle AOB$**

Avem  $m(\sphericalangle AOB) \geq m(\sphericalangle BOD)$ , adică  $a \geq c$ .

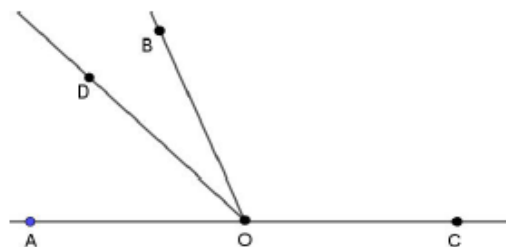
Din (1) și (2), prin scădere, obținem

$$(a + b) - (a + c) = b - c = 90^0, (3).$$

Cum  $m(\sphericalangle COD) = m(\sphericalangle BOC) + m(\sphericalangle BOD) = 135^0$  avem  $b + c = 135^0$ , (4).

Din (3) și (4), prin adunare membru cu membru, obținem  $2 \cdot b = 225^0 \Rightarrow b = 112^030'$ ,

iar din (1) avem că  $a = 180^0 - 112^030' = 67^030'$ . În concluzie  $m(\sphericalangle AOB) = 67^030'$ .



**Cazul II: [OA este inclusă în interiorul  $\sphericalangle BOD$**

Avem  $m(\sphericalangle BOD) \geq m(\sphericalangle AOB)$ , adică  $c \geq a$ .

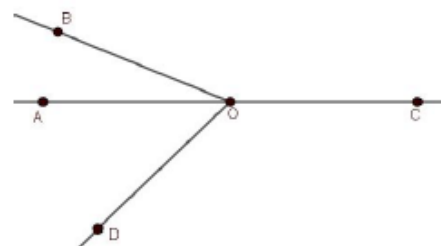
$$m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOC) = m(\sphericalangle AOC) = 180^0 \text{ de unde}$$

$$m(\sphericalangle AOD) = m(\sphericalangle AOC) - m(\sphericalangle COD) = 180^0 - 135^0 = 45^0$$

Cum  $m(\sphericalangle AOD) = m(\sphericalangle BOD) - m(\sphericalangle AOB) = c - a$  avem că

$$c - a = 45^0, (5).$$

Din (2) și (5), prin adunare membru cu membru, obținem  $2 \cdot c = 135^0 \Rightarrow c = 67^030'$  de unde  $a = 90^0 - 67^030' = 22^030'$ . În concluzie  $m(\sphericalangle AOB) = 22^030'$ .



Detalii de rezolvare	Barem asociat
Figurile corespunzătoare celor două cazuri ale problemei .....	1p
Notează $m(\sphericalangle AOB) = a$ , $m(\sphericalangle BOC) = b$ și $m(\sphericalangle BOD) = c$ , deduce relațiile $a + b = 180^0$ , (1) și $a + c = 90^0$ , (2) precizând că $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOD$ sunt ascuțite	1p
<b>Cazul I: [OD este inclusă în interiorul <math>\sphericalangle AOB</math></b>	
Din (1) și (2), prin scădere, obținem $b - c = 90^0$ , (3) .....	1p
Deduce $b + c = 135^0$ , (4).....	1p
$m(\sphericalangle AOB) = 67^030'$ .....	1p
<b>Cazul II: [OA este inclusă în interiorul <math>\sphericalangle BOD</math></b>	
Deduce $m(\sphericalangle AOD) = 45^0$ și argumentează că $c - a = 45^0$ .....	1p
Deduce $m(\sphericalangle AOB) = 22^030'$ .....	1p

**BAREM PROBLEMA NR. 3/FIȘA NR.3 (OLM ARGES 2019)**

Se notează  $(\sphericalangle AOB)$  cu  $x$  și  $\Rightarrow (\sphericalangle COB) = 4x$  se obține

$(\sphericalangle COB) = 144^\circ$  .....1p

Finalizare :  $(\sphericalangle COD) = 108^\circ$  .....2p

b) Se tratează cazul  $[ON \subset Int(\sphericalangle COM)]$ .

Dacă se notează  $(\sphericalangle MON) = x \Rightarrow (\sphericalangle DOM) = (\sphericalangle CON) = 2x$  și se obține

$x = 21^\circ 36'$  .....1p

Obține  $m(\sphericalangle CON) = 43^\circ 12' < 45^\circ$  care nu convine .....1p

Se tratează cazul  $[OM \subset Int(\sphericalangle CON)]$ .

Dacă se notează  $(\sphericalangle MON) = x \Rightarrow (\sphericalangle CON) = 2x; (\sphericalangle DOM) = 2x - x = x$  și se obține  $x = 36^\circ$ ,

deci  $(\sphericalangle CON) = 72^\circ > 45^\circ$  .....1p

Finalizare  $(\sphericalangle BOM) = (\sphericalangle BOC) + (\sphericalangle COM) = 180^\circ$  și B,O,M coliniare .....1p

**BAREM PROBLEMA NR. 4/FIȘA NR.3 (OLM ARGES 2019)**

a) Avem  $3 \cdot AC = 2 \cdot BC$ , (1),  $AC + CB = AB$ , deci  $AC + BC = 160$ , (2). ..... 1p  
Înmulțim (2) cu 2 și avem  $2 \cdot AC + 2 \cdot BC = 320$  și utilizând (1)  $\Rightarrow 5 \cdot AC = 320 \Rightarrow$   
 $AC = 64$  cm. .... 2p

Analog se calculează și se obține  $BD = 100$  cm. .... 2p

b) Dacă  $DB = 100$  cm, atunci  $AD = 60$  cm ..... 1p

și cum  $AC = 64$  cm  $\Rightarrow$  punctele sunt în ordinea : A, D, C, B. .. 1p