Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Deva, 23 aprilie 2019

Soluţii şi barem orientativ de corectare la CLASA a XI-a

Problema 1. *Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, şi $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea că există o matrice idempotentă $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, astfel încât $C^* = AB - BA$. Arătaţi că $(AB - BA)^2 = O_n$.*
(C se numeşte idempotentă dacă $C^2 = C$; matricea C^* este adjuncta matricei C.)
Soluţie şi barem:
Arătăm că matricea C nu poate fi inversabilă. Dacă C ar fi inversabilă, din idempotenţă rezultă că $C = I_n$. Dar atunci $AB - BA = C^* = I_n^* = I_n$, egalitate imposibilă deoarece $tr(AB - BA) = 0 \neq n = tr(I_n)$. 2p
Matricea C fiind neinversabilă, are rangul $rang(C) \leq n - 1$. Distingem cazurile:
i) $\underline{rang(C) \leq n-2}$. Atunci $AB - BA = C^* = O_n$, deci $(AB - BA)^2 = O_n$. 1p
ii) $\underline{rang(C) = n-1}$. Atunci $C^* \neq O_n$ şi cum $C \cdot C^* = O_n$, din inegalitatea lui Sylvester rezultă că $1 \leq rang(C^*) = rang(C) + rang(C^*) - n + 1 \leq rang(C\dot{C}^*) + 1 = 1$, deci $rang(C^*) = 1$.
. . . . 2p
Dar atunci, $(AB - BA)^2 = tr(AB - BA) \cdot (AB - BA) = O_n$. 2p

Problema 2. *Fie $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie continuă, constantă pe $\mathbb{N}$.*
Dacă pentru orice numere reale $0 \leq a < b < c < d$, pentru care $f(a) = f(c)$ şi $f(b) = f(d)$ are loc $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{c+d}{2}\right)$, arătaţi că f este constantă.
Soluţie şi barem:
Fie $k = f(0)$ şi pentru orice $n \in \mathbb{N}$ mulţimea $A_n = \frac{1}{2^n} \cdot \mathbb{N}$. Arătăm prin inducţie după $n \in \mathbb{N}$ că $f(x) = k$, pentru orice $x \in A_n$.
Pentru $n = 0$, $f(m) = k$, $\forall m \in \mathbb{N}$, conform ipotezei. 1p
Fie acum $n \in \mathbb{N}$ pentru care $f(x) = k$, $\forall x \in A_n$. Dacă $x \in A_{n+1} \setminus A_n$, există $m \in \mathbb{N}$, astfel încât $x = \frac{2m+1}{2^{n+1}}$. 1p
Alegând $a = \frac{m}{2^n}$, $b = \frac{m+1}{2^n}$, $c = (m + 2)$ şi $d = (m + 4)$, avem $0 \leq a < b < c < d$, cu $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = k$. Atunci $x = \frac{a+b}{2}$ şi

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{c+d}{2}\right) = f(m+3) = k.$$

Rezultă că $f(x) = k$, $\forall x \in A_{n+1}$. 3p
Cum mulţimea $A = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$ este densă în $[0, \infty)$, iar f este continuă şi constantă pe A, rezultă că f este constantă pe $[0, \infty)$. 2p

Problema 3. *a) Arătaţi că există funcţii derivabile $f : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ cu proprietatea că $f(f'(x)) = x$, pentru orice $x > 0$.*

b) Arătaţi că nu există funcţii derivabile $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(f'(x)) = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Soluţie şi barem:

a) Fie φ soluţia pozitivă a ecuaţiei $r^2 - r - 1 = 0$. Atunci funcţia

$$f : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty) : x \mapsto f(x) = \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{\frac{1}{\varphi}} \cdot x^{\varphi}$$

satisface condiţia din enunţ: $f'(x) = \varphi^{1-\frac{1}{\varphi}} \cdot x^{\varphi-1}$ şi $f(f'(x)) = \varphi^{\varphi-1-\frac{1}{\varphi}} \cdot x^{\varphi(\varphi-1)} = x$, $\forall x > 0$.
.... 2p.

b) Să presupunem că ar exista o funcţie derivabilă $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(f'(x)) = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Atunci f este surjectivă, iar f' este injectivă.......................... 1p

Cum f' are proprietatea valorilor intermediare (proprietatea lui Darboux), rezultă că f' este strict monotonă (şi continuă).. 1p

Dacă există $a \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f'(a) = 0$, atunci fie $f'(x) < 0 < f'(y)$ pentru orice $x < a < y$, de unde $f(x) \geq f(a)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, fie $f'(x) > 0 > f'(y)$ pentru orice $x < a < y$, şi deci $f(x) \leq f(a)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Rezultă că funcţia f nu este surjectivă, contradicţie.. 1p

Dacă f' nu se anulează, atunci f' are semn constant, astfel că intervalul $J = Im(f')$ este inclus fie în $(0, \infty)$, fie în $(-\infty, 0)$. Rezultă că f este strict monotonă, deci injectivă............. 1p

Obţinem că $f(J) = \mathbb{R} = f(\mathbb{R})$, contrazicând injectivitatea lui f.......................... 1p

Problema 4. *Fie p un număr prim. Pentru orice permutare $\sigma \in S_p$ considerăm matricea $A_\sigma = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,p}} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{Z})$, cu elementele $a_{ij} = \sigma^{i-1}(j)$, pentru orice $i, j = \overline{1,p}$, unde σ^0 este permutarea identică, iar $\sigma^k = \underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \cdots \circ \sigma}_{\text{de } k \text{ ori}}$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.*

Arătaţi că mulţimea $D = \{|\det(A_\sigma)| : \sigma \in S_p\}$ are cel mult $1 + (p-2)!$ elemente.

Soluţie şi barem:

Arătăm că $\det(A_\sigma) = 0$, pentru orice permutare care nu este un ciclu de lungime p.

Notăm cu C_i coloana cu numărul i din matricea A_σ. Cum fiecare linie a matricei conţine toate numerele $1, 2, \ldots, p$, avem

$$C_1 + C_2 + \cdots + C_p = \frac{p(p+1)}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

.... 1p

Dacă σ nu este un ciclu de lungime p, descompunerea sa în cicluri disjuncte conţine un ciclu de lungime k, pentru un $k \in \mathbb{N}$, cu $1 \leq k < p$. Fie $c = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$ un astfel de ciclu din descompunerea lui σ. La intersecţia fiecărei linii a matricei A_σ cu coloanele C_{i_1}, C_{i_2}, $\ldots$, C_{i_k} ale sale se găsesc toate numerele din mulţimea $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, astfel că

$$C_{i_1} + C_{i_2} + \cdots + C_{i_k} = (i_1 + i_2 + \cdots + i_k) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} .$$

.... 1p

Coloanele matricei A_σ sunt atunci liniar dependente, astfel că $\det(A_\sigma) = 0$. 1p

Fie acum σ o permutare ciclică de ordin p. Deoarece p este prim, pentru orice $k = \overline{1, p-1}$ avem

$$\{\sigma^{kl} | \, l = \overline{0, p-1}\} = \{\sigma^l | \, l = \overline{0, p-1}\} ,$$

astfel că liniile matricei A_{σ^k} sunt aceleaşi cu cele ale matricei A_σ, permutate într-o anumită ordine. Rezultă că $|\det(A_{\sigma^k})| = |\det(A_\sigma)|$, pentru orice $k = \overline{1, p-1}$. 1p

Pentru orice număr $k \in \mathbb{N}^* \cap D$ vor exista deci cel puţin $p - 1$ permutări ciclice diferite $\sigma \in S_p$ astfel încât $k = |\det(A_\sigma)|$. 1p

Numărul permutărilor ciclice de ordin p este $(p-1)!$. 1p

Fie $d = |D|$. Atunci $(d-1)(p-1) \leq (p-1)!$, de unde obţinem inegalitatea din enunţ...... 1p