Ministerul Educației Naționale · Inspectoratul Școlar Județean Hunedoara · romania2019.eu · Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Deva, 23 aprilie 2019

CLASA a X-a

Problema 1. Fie a, b, c numere reale strict pozitive. Să se arate că

$$\frac{1}{abc}+1 \geq 3\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{a+b+c}\right).$$

Soluţie. Folosind inegalităţile $a^2+b^2+c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ şi $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$, ... 2p

obţinem

$$3\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{a+b+c}\right) \leq \frac{1}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}.$$

.... 2p

Notând $\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}=t$, este suficient să arătăm că $t^3+1 \geq t^2+t$, sau $(t-1)^2(t+1) \geq 0$, ceea ce este evident. 3p

Problema 2. Fie $A_1A_2\ldots A_n$ un poligon regulat. Să se determine numărul de submulţimi $\{A_i, A_j, A_k, A_l\}$ ale căror elemente sunt vârfurile unui trapez (patrulaterul cu două laturi paralele şi inegale).

Soluţie. Dacă n este impar şi $A_iA_j || A_kA_l$, atunci un diametru al cercului circumscris poligonului care trece printr-un vârf al acestuia va fi mediatoare a celor două segmente. 1p

Acesta poate fi ales în n moduri, iar apoi perechea de segmente în $\binom{(n-1)/2}{2}$ moduri. Segmentele nu pot fi congruente, altfel patrulaterul determinat de acestea ar fi dreptunghi, deci poligonul ar conţine puncte diametral opuse, imposibil. Aşadar numărul căutat este $n\binom{(n-1)/2}{2} = \frac{n(n-1)(n-3)}{8}$ 2p

Dacă n este par, perechile de segmente paralele sunt de 2 tipuri: paralele cu o latură a poligonului, respectiv perpendiculare pe un diametru care trece printr-un vârf al poligonului. Numărul de alegeri (numărând de două ori perechile de segmente congruente) este, în primul caz, $\frac{n}{2}\binom{n/2}{2}$, iar în al doilea caz, $\frac{n}{2}\binom{(n-2)/2}{2}$. 2p

Numărul de perechi de segmente congruente este $\binom{n/2}{2}$. În concluzie, numărul cerut este $\frac{n}{2}\binom{n/2}{2}+\frac{n}{2}\binom{(n-2)/2}{2}-2\binom{n/2}{2}=\frac{n(n-2)(n-4)}{8}$ 2p

Problema 3. Determinaţi numerele naturale $n \geq 4$ pentru care este adevărată proprietatea: orice numere complexe distincte, nenule a, b, c care verifică

$$(a-b)^n+(b-c)^n+(c-a)^n=0,$$

sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.

Soluţie. Vom arăta că $n \in \{4,5,7\}$. Fie $x=a-b$, $y=b-c$. Evident, $x, y \neq 0, \alpha=\frac{x}{y} \neq -1$. Relaţia din enunţ devine

$$x^n+y^n+(-x-y)^n=0.$$

.... 1p

Dacă n este impar, obţinem $x^n+y^n-(x+y)^n=0$, sau $\alpha^n+1-(\alpha+1)^n=0$. Cum $\alpha \neq -1$, deducem

$$\alpha^{n-1}-\alpha^{n-2}+\ldots+1-(\alpha+1)^{n-1}=0,$$

echivalent cu

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\binom{n-1}{k}+(-1)^{k+1}\right)\alpha^k=0.$$

Cum $\alpha\neq 0$, obţinem

$$P(\alpha)=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\binom{n-1}{k}+(-1)^{k+1}\right)\alpha^{k-1}=0.$$

Pentru ca a,b,c să fie afixele vârfurilor unui triunghi echilateral, trebuie ca α să fie o rădăcină primitivă de ordinul 3 a unităţii, deci $P(\alpha)=n(\alpha^2+\alpha+1)^{\frac{n-3}{2}}$. Identificând coeficienţii lui α^{n-5} deducem $n\in\{5,7\}$. Pentru $n=5$ obţinem $P(\alpha)=5(\alpha^2+\alpha+1)$, iar pentru $n=7, P(\alpha)=7(\alpha^2+\alpha+1)^2$. 3p

Dacă n este par, obţinem similar că polinomul

$$Q(\alpha)=\alpha^n+1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}\binom{n}{k}\alpha^k$$

trebuie să coincidă cu $(\alpha^2+\alpha+1)^{\frac{n}{2}}$, de unde obţinem $n=4$, iar $Q(\alpha)=(\alpha^2+\alpha+1)^2$. ... 3p

Problema 4. Fie $A,B\subset\mathbb{N}$ două mulţimi finite, nevide. Notăm cu $\mathcal{F}$ mulţimea funcţiilor $f:\mathcal{P}(A)\to B$ cu proprietatea

$$f(X\cap Y)=\min(f(X),f(Y)),\ \forall X,Y\subset A,$$

şi cu $\mathcal{G}$ mulţimea funcţiilor $g:\mathcal{P}(A)\to B$ cu proprietatea

$$g(X\cup Y)=\max(g(X),g(Y)),\ \forall X,Y\subset A.$$

Să se arate că mulţimile $\mathcal{F}$ şi $\mathcal{G}$ au acelaşi număr de elemente şi să se determine acest număr.

Soluţie. Definim o bijecţie $\Phi:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ prin formula $\Phi(f)=g$, unde $f\in\mathcal{F}$ iar $g(X)=|B|+1-f(\overline{X})$, $X\subset A$, unde $\overline{X}=A-X$. 2p

Arătăm că funcţia este bine definită: dacă $f\in\mathcal{F}$, atunci

$$\begin{aligned}g(X\cup Y)&=|B|+1-f(\overline{X\cup Y})=|B|+1-f(\overline{X}\cap\overline{Y})=|B|+1-\min(f(\overline{X}),f(\overline{Y}))\\&=\max(|B|+1-f(\overline{X}),|B|+1-f(\overline{Y}))=\max(g(X),g(Y)).\end{aligned}$$

.... 2p

Funcţia Φ este bijectivă şi avem, pentru $g\in\mathcal{G}$, $\Phi^{-1}(g)=f$, unde $f(X)=|B|+1-g(\overline{X})$. Deducem că $|\mathcal{F}|=|\mathcal{G}|$. Să observăm că dacă $g\in\mathcal{G}$ şi $X\subset Y$, atunci $g(Y)=g(X\cup Y)=\max(g(X),g(Y))$, deci $g(X)\leq g(Y)$, adică funcţia $g:(\mathcal{P},\subset)\to(B,\leq)$ este crescătoare. Fie

$$A=\{a_1<a_2<\ldots<a_n\},\ B=\{b_1<b_2<\ldots<b_m\}.$$

Dacă valoarea minimă a unei funcţii $g\in\mathcal{G}$ este b_i, atunci $g(\emptyset)=b_i$. Considerăm $\mathcal{G}=G_1\cup G_2\cup\ldots\cup G_m$, unde $G_i=\{g\in\mathcal{G}\ |g(\emptyset)=b_i\}$. O funcţie $g\in G_i$ este unic determinată de valorile luate în mulţimile $\{a_1\},\{a_2\},\ldots,\{a_n\}$, unde g poate lua arbitrar valorile $\{b_i,b_{i+1},\ldots,b_m\}$, rezultând $(m-i+1)^n$ funcţii. În rest,

$$g(\{a_{i_1},a_{i_2},\ldots,a_{i_k}\})=\max(g(\{a_{i_1}\}),g(\{a_{i_2}\}),\ldots,g(\{a_{i_k}\})).$$

În concluzie, $|\mathcal{G}|=1^n+2^n+\ldots+m^n$. 3p