MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN HUNEDOARA

romania2019.eu
Președinția României la Consiliul Uniunii Europene

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Deva, 23 aprilie 2019

Clasa a IX-a

Soluţii şi bareme orientative

Problema 1. Fie ABC un triunghi oarecare şi P un punct interior astfel încât $BP = AC$. Notăm cu M mijlocul segmentului AP şi cu R mijlocul segmentului BC. Fie $BP \cap AC = \{E\}$. Demonstraţi că bisectoarea unghiului $\measuredangle BEA$ este perpendiculară pe MR.

Soluţie şi barem: Fie N mijlocul lui AB. Atunci MN este linie mijlocie în triunghiul APB, deci $MN = \frac{PB}{2}$. De asemenea NR este linie mijlocie în triunghiul ABC, deci $NR = \frac{AC}{2}$. Atunci triunghiul NMR este isoscel în N. Obţinem $\measuredangle NMR \equiv \measuredangle NRM$. **3p**

Fie $Q \in BC$ astfel încât $MQ \parallel AC$. Atunci $MQ \parallel NR$, deci $\measuredangle QMR \equiv \measuredangle NRM$, adică $\measuredangle QMR \equiv \measuredangle NMR$, de unde rezultă că MR este bisectoarea unghiului $\measuredangle NMQ$. **2p**

Unghiurile $\measuredangle BEC$ şi $\measuredangle NMQ$ au laturile paralele şi sunt congruente, prin urmare, bisectoarele lor sunt paralele. Cum bisectoarele unghiurilor $\measuredangle BEC$ şi $\measuredangle BEA$ sunt perpendiculare, se obţine concluzia. **2p**

Observaţie: Alternativ se poate demonstra vectorial. Se arată că $2\overrightarrow{MR} = 2\overrightarrow{MP} + 2\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{EX} + \overrightarrow{EY} = 2\overrightarrow{EZ}$, unde $X \in (EB$ cu $\overrightarrow{EX} = \overrightarrow{PB}$, $Y \in (EC$ cu $\overrightarrow{EY} = \overrightarrow{AC}$, iar Z este mijlocul segmentului XY. Triunghiul EXY este isoscel cu vârful în E, deci $MR \parallel EZ$, iar EZ este bisectoarea unghiului $\measuredangle BEC$. Se finalizează ca mai sus.

Problema 2. Determinaţi toate numerele naturale n, $n \geq 3$, pentru care există o mulţime M, formată din n vectori diferiţi, nenuli şi cu module egale astfel încât $\sum_{\overrightarrow{u} \in M} \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, ştiind că oricare ar fi $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in M$ avem $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$.

Soluţie şi barem: Cazul n impar este convenabil. De exemplu considerăm un poligon regulat $A_1A_2...A_n$. Atunci mulţimea $M_n = \left\{\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}, ..., \overrightarrow{A_{n-1}A_n}, \overrightarrow{A_nA_1}\right\}$ satisface condiţiile. **2p**

Demonstrăm că n nu poate fi egal cu 4. Presupunem contrariul. Atunci $M = \{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{z}\}$. Fie O un punct din plan. Atunci există U, V, W, Z astfel încât $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OU}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OV}$, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{OW}$ şi $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{OZ}$. Cum vectorii au acelaşi modul, deducem că aceste patru puncte sunt vârfurile unui patrulater inscriptibil. Fără a restrânge generalitatea, fie $UVZW$ acest patrulater. Fie P, Q simetricele lui V şi Z faţă de O. Din $\overrightarrow{OU} + \overrightarrow{OV} + \overrightarrow{OW} + \overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{0}$ obţinem $\overrightarrow{OU} + \overrightarrow{OW} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$, deci $UPWQ$ este paralelogram, eventual degenerat, deci dreptunghi. Atunci $\overrightarrow{OU} + \overrightarrow{OW} = \overrightarrow{0}$, ceea ce nu convine. **2p**

În continuare demonstrăm că orice număr natural par, mai mare sau egal cu 6, este convenabil. Considerăm o mulţime de puncte $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ astfel încât $A_1A_2A_3$ este triunghi echilateral, $A_3A_4...A_n$ este poligon regulat cu $n-3$ laturi de aceeaşi lungime cu a triunghiului anterior şi măsura în radiani a unghiului $A_2A_3A_n$ este de forma $\alpha \cdot \pi$, unde α este număr iraţional (spre exemplu măsura unghiului sa fie $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$). Atunci mulţimea $M = \left\{\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}, \overrightarrow{A_3A_1}, \overrightarrow{A_3A_4}, ..., \overrightarrow{A_{n-1}A_n}, \overrightarrow{A_nA_3}\right\}$ satisface condiţia din problemă, iraţionalitatea lui α asigurându-ne că nu există vectori de aceeaşi direcţie. În concluzie $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, 4\}$ **3p**

Observaţie: Alternativ se poate demonstra pentru n impar şi $n = 4$ ca mai sus. Se arată apoi că dacă n convine atunci $n + 3$ convine. Pentru aceasta, fie n vectori care respectă condiţiile $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \ldots, \overrightarrow{OA_n}$. Dreptele $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n$ împreună cu cele $2n$ care fac unghiuri de $\frac{\pi}{3}$, respectiv $\frac{2\pi}{3}$ cu primele n drepte, intersectează cercul pe care se află punctele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ în cel mult $6n$ puncte. Alegem un punct A_{n+1} diferit de acestea, situat pe cerc şi considerăm triunghiul echilateral $A_{n+1}A_{n+2}A_{n+3}$ înscris în acest cerc. Vectorii $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \ldots, \overrightarrow{OA_{n+3}}$ sunt $n + 3$ vectori ce respectă condiţiile. Pentru $n \geq 6$ par, avem că $n - 3 \geq 3$ este impar şi convine, deci n convine.

Problema 3. Pentru orice număr natural nenul n definim mulţimea

$$A_n = \left\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \middle| \sqrt{x^2 + y + n} + \sqrt{y^2 + x + n} \in \mathbb{N}\right\}.$$

Demonstraţi că pentru orice $n \geq 1$ mulţimea A_n este nevidă şi finită.

Soluţie şi barem: Din $\sqrt{x^2 + y + n} + \sqrt{y^2 + x + n} \in \mathbb{N}$ demonstrăm că $x^2 + y + n$ şi $y^2 + x + n$ sunt pătrate perfecte. **2p**

Perechea $(n - 1, n - 1) \in A_n$, deci A_n este nevidă. **1p**

Dacă $(x, y) \in A_n$ atunci $x^2 + y + n > x^2$. Dacă presupunem că $x^2 + y + n < (x + 1)^2$, atunci $x^2 + y + n$ nu mai poate fi pătrat perfect, ceea ce nu convine. Rămâne $x^2 + y + n \geq (x + 1)^2$. **2p**

Analog avem şi $y^2 + x + n \geq (y + 1)^2$. Adunând cele două relaţii obţinem $2n - 2 \geq x + y$, ceea ce implică A_n finită. **2p**

Problema 4. Determinaţi toate funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care satisfac relaţia

$$f(x + y) \leq f\left(x^2 + y\right),$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

Soluţie şi barem: Vom demonstra că singurele funcţii convenabile sunt cele constante.

Cu alegerea $y = -x$, obţinem $f(0) \leq f(x^2 - x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Deoarece imaginea funcţiei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - x$ este $\left[-\frac{1}{4}, \infty\right)$, atunci $f(0) \leq f(t)$, pentru orice $t \geq -\frac{1}{4}$. Apoi, alegerea $y = -x^2$ conduce la $f(x - x^2) \leq f(0)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Similar obţinem $f(t) \leq f(0)$, pentru orice $t \leq \frac{1}{4}$. Obţinem $f(t) = f(0)$, pentru orice $t \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ **3p**

Prin inducţie, demonstrăm că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, $f(t) = f(0)$, pentru orice $t \in \left[-\frac{n}{4}, \frac{n}{4}\right]$. Pentru $n = 1$ este verificat, presupunem adevărat pentru n şi demonstrăm pentru $n + 1$. Alegem $y = -x - \frac{n}{4}$. Atunci $f\left(-\frac{n}{4}\right) \leq f\left(x^2 - x - \frac{n}{4}\right)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Cum imaginea funcţiei

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^2 - x - \frac{n}{4}$ este $\left[-\frac{n+1}{4}, \infty\right)$, obţinem $f(0) \leq f(t)$, pentru orice $t \geq -\frac{n+1}{4}$. Similar, alegerea $y = -x^2 + \frac{n}{4}$, conduce la $f\left(-x^2 + x + \frac{n}{4}\right) \leq f\left(\frac{n}{4}\right)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Suntem conduşi la $f(t) \leq f(0)$, pentru orice $t \leq \frac{n+1}{4}$ şi inducţia este finalizată. **3p**

Acum, fie $x \in \mathbb{R}$. Fie $n = [4|x|] + 1 > 4|x|$. Atunci $-\frac{n}{4} \leq x \leq \frac{n}{4}$. Obţinem $f(x) = f(0)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. **1p**