INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN BRĂILA

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 14.02.2009

CLASA A V-A

1. Să se arate că numărul natural $a = 1+3+5+...+2009$ este pătrat perfect.

***

2. Să se compare numerele 3^{2n+7} şi 2^{3n+11}, unde n este număr natural.

Gazeta Matematică

3. Determinați toate numerele naturale de forma $\overline{abc}$ care împărțite la $\overline{bc}$ dau câtul 5 şi restul $\overline{bc} - 5$.

prof. Liliana Stoian

4. Câte numere naturale de forma $\overline{abcd}$ se împart exact la $\overline{a0c}$?

prof. Narcis Turcu

Notă:

1) Toate subiectele sunt obligatorii.
2) Timpul de lucru este de 3 ore.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN BRĂILA

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 14.02.2009

CLASA A VI-A

1. Unghiurile AOB şi BOC sunt adiacente. Bisectoarea unghiului AOB formează cu semidreapta $[OC$ un unghi de măsură 105°, iar unghiul format de bisectoarele unghiurilor AOB şi BOC are măsura de 65°. Determinați $m(\sphericalangle AOC)$ şi $m(\sphericalangle AOB)$.

***

2. În exteriorul triunghiului ascuțitunghic MNP se construiesc triunghiurile echilaterale MNQ şi MPR. Să se demonstreze că $QP = NR$.

***

3. Să se determine cardinalul mulțimii:
$A=\left\{\overline{abc} \,\middle|\, a>c \text{ şi există } p \text{ număr natural prim astfel încât } \left(\overline{abc}-\overline{cba}\right) \vdots\, p^3\right\}$.

prof. Narcis Turcu

4. Să se arate că pentru $n \in \mathbb{N}^*$, $n \vdots 4$, suma tuturor fracțiilor de forma $\frac{a}{b}$ cu $1 \le a < b \le n$ este număr natural.

prof. Gerea-Teodorescu Nicolae

Notă:

1) Toate subiectele sunt obligatorii.
2) Timpul de lucru este de 3 ore.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN BRĂILA

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 14.02.2009

CLASA A VII-A

1. Să se arate că $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{2008\cdot 2009}<1.$

***

2. Determinați numerele naturale x şi y care verifică relația:

$$2xy+x+y=85.$$

prof. Octavia Popa

3. Fie dreptunghiul $ABCD$ cu $AB>BC$. Bisectoarea unghiului ABC intersectează CD în Q şi AD în P. Fie $[DT$ bisectoarea unghiului PDQ, $T\in(BP)$. Dacă $CT\cap AD=\{M\}$ şi $AT\cap CD=\{S\}$, arătați că $SQ=DM$.

prof. Nicolae Stănică

4. (enunț modificat) Fie triunghiul isoscel ABC, $[AB]\equiv[AC]$ şi punctul P situat în exteriorul triunghiului, dar în interiorul unghiului BAC. Dacă $\sphericalangle APB\equiv\sphericalangle APC$ şi unghiurile $\sphericalangle ABP, \sphericalangle ACP$ sunt obtuze, demonstrați că $[BP]\equiv[CP]$.

prof. Marius Damian

Notă:

1) Toate subiectele sunt obligatorii.
2) Timpul de lucru este de 3 ore.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN BRĂILA

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 14.02.2009

CLASA A VIII-A

1. Determinați valorile numerelor reale a şi b care îndeplinesc condiția:

$$a^2+b^2-6a+4b+13=0.$$

***

2. Fie numerele naturale nenule a,b,c,d,x,y astfel încât

$x=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ şi $y=\frac{b}{a}+\frac{d}{c}$. Arătați că $x\cdot y=4$.

prof. Marius Damian

3. Fie tetraedrul $ABCD$ şi punctele M, N mijloacele segmentelor

$[AB]$, respectiv $[CD]$. Demonstrați că $MN<\frac{AD+BC}{2}$.

***

4. Fie $ABCDMNPQ$ cub şi C_1, C_2 cercurile circumscrise pătratelor $ABCD$ şi $ADQM$. Fie R, T mijloacele arcelor mici AD din C_1 şi respectiv C_2. Demonstrați că $RT\parallel UV$, unde $\{U\}=RP\cap(ADQ)$ şi $\{V\}=TP\cap(ABC)$.

prof. Nicolae Stănică

Notă:

1) Toate subiectele sunt obligatorii.
2) Timpul de lucru este de 3 ore.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN BRĂILA

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 14.02.2009

CLASA A IX-A

1. Fie triunghiul ABC. Paralela prin A la BC taie paralela prin B la AC în P şi paralela prin C la AB în M. Paralela prin B la AC taie paralela prin C la AB în N. Fie G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor ACM, ABP, respectiv BCN. Să se arate că triunghiurile ABC, MNP şi $G_1G_2G_3$ au acelaşi centru de greutate.

prof. Carmen şi Viorel Botea

2. Fie $S = n + (n+2) + (n+4) + ... + 3n,\ n \in \mathbb{N}^*$.

a) Determinați valorile lui n ştiind că numărul S are 3 cifre.

b) Pentru $n = 2009,$ aflați câte cifre are numărul de cifre ale lui S^{2009}.

prof. Valentin Damian

3. Să se arate că $\left(1 + x^{2008}\right)^{2009} \geq \left(1 + x^{2009}\right)^{2008}, \quad \forall\ x \in \mathbb{R}.$

prof. Dan Negulescu

4. Să se determine $m, n, p \in \mathbb{N}$ cu $n \neq 0$ astfel încât

$$\left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{m\sqrt{2}}{n}\right] = [px],\ \forall x \in \mathbb{R},$$

unde $[x]$ reprezintă parea întreagă a numărului real x.

prof. Gabriel Daniilescu

Notă:

1) Toate subiectele sunt obligatorii.
2) Timpul de lucru este de 3 ore.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN BRĂILA

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 14.02.2009

CLASA A X-A

1. a) Să se demonstreze că numărul $\log_3 2$ este irațional.

b) Să se arate că există numere iraționale x şi y astfel încât x^y să fie rațional.

***

2. Determinați $z \in \mathbb{C}$ ştiind că $|z-i| \leq 1$ şi $|z-2-i| \leq 1$.

Gazeta matematică

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$\left[\sqrt{x+1}\right]+\left[\sqrt{2-x}\right]=[2-\ln x],$$

unde $[A]$ reprezintă partea întreagă a numărului real A.

prof. Valentin Damian

4. Să se rezolve ecuația:

$$149+5^{x+2}=25x^2+\log_2\left(x^{50}\right).$$

prof. Gabriel Daniilescu

Notă:

1) Toate subiectele sunt obligatorii.
2) Timpul de lucru este de 3 ore.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN BRĂILA

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 14.02.2009

CLASA A XI-A

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$, $a\in \mathbb{R}\setminus\{1\}$. Calculați $\det\left(\sum_{k=1}^{n} A^k\right)$, $n\in \mathbb{N}^*$.

***

2. Fie matricele $A, B, C\in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $ABC=I_n$.
a) Să se demonstreze că A, B, C sunt inversabile.
b) Dacă matricea $U=I_n+A+AB$ este inversabilă, să se demonstreze că matricele $V=I_n+B+BC$ şi $W=I_n+C+CA$ sunt inversabile şi suma inverselor lor este I_n.

prof. Emilian Runceanu

3. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_1=a$, $x_2=b$, $a>b>0$ şi $\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)^2-1=\frac{x_{n+2+(-1)^{n+1}}}{x_{n+2}}$, $\forall n\geq 1$. Să se studieze convergența şirului.

prof. Nicolae Stănică

4. Fie $q>1$ şi funcția $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$, cu proprietatea

$$f(x+1)-f(x)=r\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Demonstrați că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{f(k)}{q^k}$, $n\in\mathbb{N}^*$ este convergent şi calculați limita lui.

prof. Marius Damian

Notă:
1) Toate subiectele sunt obligatorii.
2) Timpul de lucru este de 3 ore.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN BRĂILA

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 14.02.2009

CLASA A XII-A

1. Se dă legea de compoziție $"*":\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x*y=xy-3(x+y)+12$.
a) Să se determine numărul real a astfel încât mulțimea $G=[a;\infty)$ să fie parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea "$*$".
b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\underbrace{x*x*...*x}_{n}=4,\ n\in\mathbb{N}^*$.

***

2. Să se calculeze $\int\frac{\cos x}{(2+\sin x)(3+\sin x)^3}dx,\ x\in\mathbb{R}.$

Gazeta Matematică

3. Fie $(G,\cdot)$ un grup şi $a\in G$. Arătați că dacă $x\cdot a^3=a\cdot x^3,\ \forall\ x\in G,$ atunci $a\cdot x=x\cdot a,\ \forall\ x\in G.$

***

4. Să se determine toate funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pentru care
$f(x)\cdot F(x-1)=1+x^2,\ \forall\ x\in\mathbb{R},$ unde F este o primitivă a lui f.

***

Notă:
1) Toate subiectele sunt obligatorii.
2) Timpul de lucru este de 3 ore.