



Olimpiada Națională de Matematică  
Etapa Națională, Deva, 23 aprilie 2019

CLASA a VII-a

**Problema 1.** a) Demonstrați că, dacă  $x, y \geq 1$ , atunci  $x + y - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{xy} - \frac{2}{\sqrt{xy}}$ .

b) Demonstrați că, dacă  $a, b, c, d \geq 1$  și  $abcd = 16$ , atunci  $a + b + c + d - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} - \frac{1}{d} \geq 6$ .

**Soluție și barem de corectare**

a) Inegalitatea se scrie echivalent  $(xy - 1)(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$ . ..... **3p**

b) Scriind inegalitatea de la a) mai întâi pentru  $a$  și  $b$ , apoi pentru  $c$  și  $d$ , obținem  $a + b - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{ab} - \frac{2}{\sqrt{ab}}$  și  $c + d - \frac{1}{c} - \frac{1}{d} \geq 2\sqrt{cd} - \frac{2}{\sqrt{cd}}$ . Adunând aceste două

inegalități obținem  $a + b + c + d - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} - \frac{1}{d} \geq 2\left(\sqrt{ab} + \sqrt{cd} - \frac{1}{\sqrt{ab}} - \frac{1}{\sqrt{cd}}\right)$ . **2p**

Aplicând acum inegalitatea de la a) pentru  $x = \sqrt{ab} \geq 1$  și  $y = \sqrt{cd} \geq 1$  se obține că

$a + b + c + d - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} - \frac{1}{d} \geq 2\left(2\sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}} - \frac{2}{\sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}}}\right) = 6$ . ..... **2p**

**Problema 2.** Fie  $ABCD$  un pătrat și  $E$  un punct oarecare pe latura  $(CD)$ . În exteriorul triunghiului  $ABE$  se construiesc pătratele  $ENMA$  și  $EBQP$ . Demonstrați că:

a)  $ND = PC$ ;

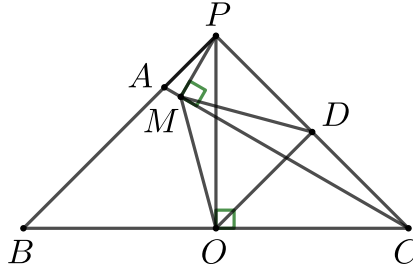
b)  $ND \perp PC$ .

**Soluție și barem de corectare:**

a) Fie  $U$  și  $V$  proiecțiile punctelor  $N$  și  $P$  pe dreapta  $CD$ . Triunghiurile dreptunghice  $NUE$  și  $EDA$  sunt congruente (IU), deci, dacă notăm  $DE = x$ ,  $CE = y$ , deducem că  $NU = x$ ,  $EU = AD = CD = x + y$  și  $DU = y$ . Analog, triunghiurile  $EPV$  și  $BEC$  sunt congruente, deci  $PV = EC = y$  și  $CV = EV - EC = (x + y) - y = x$ . Deducem că triunghiurile  $NUD$  și  $CVP$  sunt congruente (CC), prin urmare  $ND = PC$ . ..... **4p**

b) Dacă  $\{T\} = ND \cap PC$ ,  $m(\angle CDT) + m(\angle DCT) = m(\angle NDU) + m(\angle PCV) = m(\angle NDU) + m(\angle DNU) = 90^\circ$ , de unde concluzia. .... **3p**





**Problema 4.** O bucată de hârtie dreptunghiulară  $20 \times 19$ , împărțită în pătrățele unitate, este tăiată în mai multe bucăți de formă pătrată, tăieturile făcându-se de-a lungul laturilor pătrățelelor unitate. O astfel de bucată pătrată se numește *pătrat impar* dacă lungimea laturii sale este un număr impar.

- a) Care este numărul minim posibil de pătrate impare?
- b) Care este cea mai mică valoare pe care o poate lua suma perimetrelor pătratelor impare?

**Soluție și barem de corectare:**

a) Dacă notăm cu  $k$  numărul bucăților pătrate obținute și cu  $x_1, x_2, \dots, x_k$  dimensiunile lor, atunci scriind în două moduri aria dreptunghiului obținem  $19 \cdot 20 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2$ . Deoarece  $19 \cdot 20 = 380$  este divizibil cu 4, pătratul unui număr par este un multiplu de 4, iar pătratul unui număr impar este un număr care dă restul 1 la împărțirea cu 4, deducem că numărul bucăților pătrate de dimensiune impară trebuie să fie multiplu de 4. . . . . **1p** Să observăm în continuare că acest număr nu poate fi 0: la latura de dimensiune 19 nu pot contribui numai pătrate de dimensiune pară. (Alt argument: dacă am colora bucata de hârtie pe coloane, alternativ cu alb și negru astfel încât prima și ultima coloană să fie negre, am avea cu 20 mai multe pătrățele negre decât albe, ori un pătrat de dimensiune pară ocupă la fel de multe pătrățele albe ca și negre, deci nu putem avea numai din acestea.) . . . . . **1p**

Un exemplu cu 4 pătrate de dimensiune impară este ușor de dat: de exemplu decupăm din ultimele 5 coloane 4 bucăți pătrate  $5 \times 5$  (acestea sunt cele 4 pătrate de dimensiune impară). Rămâne o bucată dreptunghiulară  $20 \times 14$  care se poate tăia în bucăți  $2 \times 2$ . **1p**

b) Colorăm bucata de hârtie pe coloane, alternativ cu alb și negru astfel încât prima și ultima coloană să fie negre. Vom avea cu 20 mai multe pătrățele negre decât albe, iar un pătrat de dimensiune pară ocupă la fel de multe pătrățele albe ca și negre. Un pătrat de dimensiune  $\ell$  impară ocupă fie cu  $\ell$  mai multe pătrățele albe decât negre, fie cu  $\ell$  mai multe pătrățele negre decât albe. Așadar suma dimensiunilor pătratelor care acoperă mai multe pătrățele negre decât albe trebuie să fie cu 20 mai mare decât suma dimensiunilor pătratelor care acoperă mai multe pătrate albe decât negre. Rezultă că suma lungimilor pătratelor care acoperă mai multe pătrățele negre decât albe trebuie să fie cel puțin 20, deci suma dimensiunilor pătratelor de dimensiune impară trebuie să fie cel puțin 20, așadar suma perimetrelor pătratelor impare este cel puțin 80. . . . . **3p**

Un exemplu în care suma cerută este chiar 80 este cel dat la a). . . . . **1p**