



MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE



INSPECTORATUL
ȘCOLAR
JUDEȚEAN
HUNEDOARA



Societatea
de Științe
Matematice
din România

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Deva, 23 aprilie 2019

CLASA a VII-a

- Problema 1.** a) Demonstrați că, dacă $x, y \geq 1$, atunci $x + y - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{xy} - \frac{2}{\sqrt{xy}}$.
b) Demonstrați că, dacă $a, b, c, d \geq 1$ și $abcd = 16$, atunci $a + b + c + d - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} - \frac{1}{d} \geq 6$.

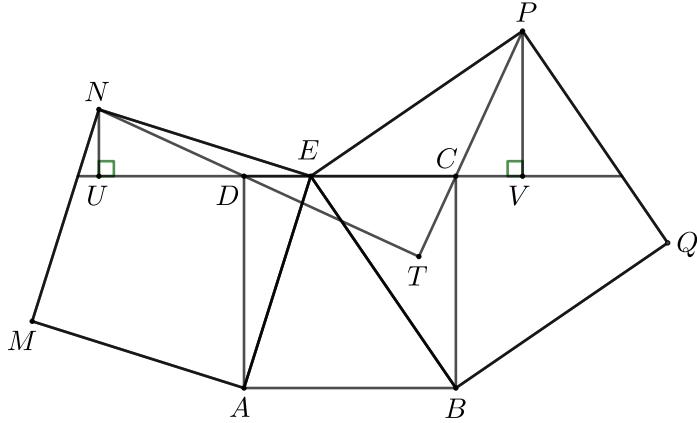
Soluție și barem de corectare

- a) Inegalitatea se scrie echivalent $(xy - 1)(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$ **3p**
b) Scriind inegalitatea de la a) mai întâi pentru a și b , apoi pentru c și d , obținem $a + b - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{ab} - \frac{2}{\sqrt{ab}}$ și $c + d - \frac{1}{c} - \frac{1}{d} \geq 2\sqrt{cd} - \frac{2}{\sqrt{cd}}$. Adunând aceste două inegalități obținem $a + b + c + d - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} - \frac{1}{d} \geq 2 \left(\sqrt{ab} + \sqrt{cd} - \frac{1}{\sqrt{ab}} - \frac{1}{\sqrt{cd}} \right)$. **2p**
Aplicând acum inegalitatea de la a) pentru $x = \sqrt{ab} \geq 1$ și $y = \sqrt{cd} \geq 1$ se obține că $a + b + c + d - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} - \frac{1}{d} \geq 2 \left(2\sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}} - \frac{2}{\sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}}} \right) = 6$ **2p**

- Problema 2.** Fie $ABCD$ un pătrat și E un punct oarecare pe latura (CD) . În exteriorul triunghiului ABE se construiesc pătratele $ENMA$ și $EBQP$. Demonstrați că:
a) $ND = PC$;
b) $ND \perp PC$.

Soluție și barem de corectare:

- a) Fie U și V proiecțiile punctelor N și P pe dreapta CD . Triunghiurile dreptunghice NUE și EDA sunt congruente (IU), deci, dacă notăm $DE = x$, $CE = y$, deducem că $NU = x$, $EU = AD = CD = x + y$ și $DU = y$. Analog, triunghiurile EPV și BEC sunt congruente, deci $PV = EC = y$ și $CV = EV - EC = (x + y) - y = x$. Deducem că triunghiurile NUD și CVP sunt congruente (CC), prin urmare $ND = PC$ **4p**
b) Dacă $\{T\} = ND \cap PC$, $m(\angle CDT) + m(\angle DCT) = m(\angle NDU) + m(\angle PCV) = m(\angle NDU) + m(\angle DNU) = 90^\circ$, de unde concluzia. **3p**



Schiță de soluție alternativă:

- a) Dacă $DE = x$, $CE = y$, atunci $NE^2 = AE^2 = x^2 + (x+y)^2$, $PE^2 = BE^2 = y^2 + (x+y)^2$. Din teorema cosinusului în triunghiurile NDE și ECP rezultă $ND^2 = PC^2 = x^2 + y^2$.
 b) Tot din teorema cosinusului, dacă $\{T\} = ND \cap PC$, atunci $\cos^2(\angle CDT) + \cos^2(DCT) = \cos^2(\angle NDE) + \cos^2(ECP) = \frac{y^2}{x^2 + y^2} + \frac{x^2}{x^2 + y^2} = 1$, de unde rezultă că $DT \perp CT$.

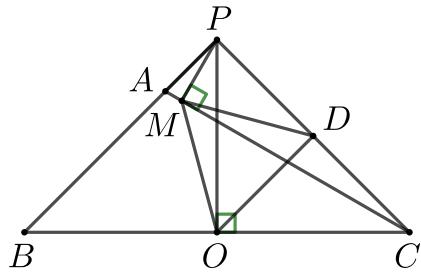
Problema 3. Fie ABC un triunghi în care $m(\angle ABC) = 45^\circ$ și $m(\angle BAC) > 90^\circ$. Fie O mijlocul laturii $[BC]$. Considerăm punctul $M \in (AC)$ astfel încât $m(\angle COM) = m(\angle CAB)$. Perpendiculara în M pe AC intersectează dreapta AB în punctul P .

- a) Aflați măsura unghiului $\angle BCP$.
 b) Arătați că, dacă $m(\angle BAC) = 105^\circ$, atunci $PB = 2MO$.

Soluție și barem de corectare:

- a) Fie P' punctul în care mediatotarea laturii $[BC]$ intersectează dreapta AB și M' proiecția punctului P' pe dreapta AC . Atunci triunghiul $P'BC$ este dreptunghic isoscel. Din teorema catetei obținem că $P'C^2 = CM' \cdot CA$ și $P'C^2 = CO \cdot CB$.

Avem aşadar $\frac{CM'}{CB} = \frac{CO}{CA}$ și $\angle OCM' = \angle ACB$, deci triunghiurile OCM' și ACB sunt asemenea. Deducem că $\angle M'OC \equiv \angle BAC \equiv \angle MOC$, ceea ce arată că punctele M și M' coincid. Atunci și punctele P și P' coincid, deci $m(\angle BCP) = m(\angle BCP') = 45^\circ$ 5p
 b) Fie D mijlocul segmentului $[PC]$. Dacă $m(\angle BAC) = 105^\circ$, atunci obținem succesiv: $m(\angle ACB) = 30^\circ$, $m(\angle MCP) = 15^\circ$, $m(\angle MDP) = 30^\circ$ și $m(\angle MDO) = 60^\circ$. În plus, $MD = OD = CD$, deci triunghiul MDO este echilateral, de unde $MO = MD = CD = \frac{PB}{2}$ 2p



Problema 4. O bucată de hârtie dreptunghiulară 20×19 , împărțită în pătrățele unitate, este tăiată în mai multe bucăți de formă pătrată, tăieturile făcându-se de-a lungul laturilor pătrățelor unitate. O astfel de bucată pătrată se numește *pătrat impar* dacă lungimea laturii sale este un număr impar.

- Care este numărul minim posibil de pătrate impare?
- Care este cea mai mică valoare pe care o poate lua suma perimetrelor pătratelor impare?

Soluție și barem de corectare:

a) Dacă notăm cu k numărul bucăților pătrate obținute și cu x_1, x_2, \dots, x_k dimensiunile lor, atunci scriind în două moduri aria dreptunghiului obținem $19 \cdot 20 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2$. Deoarece $19 \cdot 20 = 380$ este divizibil cu 4, pătratul unui număr par este un multiplu de 4, iar pătratul unui număr impar este un număr care dă restul 1 la împărțirea cu 4, deducem că numărul bucăților pătrate de dimensiune impară trebuie să fie multiplu de 4. **1p**
Să observăm în continuare că acest număr nu poate fi 0: la latura de dimensiune 19 nu pot contribui numai pătrate de dimensiune pară. (Alt argument: dacă am colora bucată de hârtie pe coloane, alternativ cu alb și negru astfel încât prima și ultima coloană să fie negre, am avea cu 20 mai multe pătrățele negre decât albe, ori un pătrat de dimensiune pară ocupă la fel de multe pătrățele albe ca și negre, deci nu putem avea numai din acestea.) **1p**

Un exemplu cu 4 pătrate de dimensiune impară este ușor de dat: de exemplu decupăm din ultimele 5 coloane 4 bucăți pătrate 5×5 (acestea sunt cele 4 pătrate de dimensiune impară). Rămâne o bucată dreptunghiulară 20×14 care se poate tăia în bucăți 2×2 . **1p**

b) Colorăm bucată de hârtie pe coloane, alternativ cu alb și negru astfel încât prima și ultima coloană să fie negre. Vom avea cu 20 mai multe pătrățele negre decât albe, iar un pătrat de dimensiune pară ocupă la fel de multe pătrățele albe ca și negre. Un pătrat de dimensiune ℓ impară ocupă fie cu ℓ mai multe pătrățele albe decât negre, fie cu ℓ mai multe pătrățele negre decât albe. Așadar suma dimensiunilor pătratelor care acoperă mai multe pătrățele negre decât albe trebuie să fie cu 20 mai mare decât suma dimensiunilor pătratelor care acoperă mai multe pătrățele albe decât negre. Rezultă că suma lungimilor pătratelor care acoperă mai multe pătrățele negre decât albe trebuie să fie cel puțin 20, deci suma dimensiunilor pătratelor de dimensiune impară trebuie să fie cel puțin 20, așadar suma perimetrelor pătratelor impare este cel puțin 80. **3p**
Un exemplu în care suma cerută este chiar 80 este cel dat la a). **1p**