



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Hunedoara, 23 aprilie, 2019

CLASA a V-a, Subiecte

Problema 1. Determinați numerele de trei cifre \overline{abc} al căror pătrat are cifra sutelor a , cifra zecilor b și cifra unităților c .

Problema 2. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Care este numărul maxim $m \leq n$ (m depinde de n), pentru care putem alege m numere dintre $1, 2, \dots, n$ cu proprietatea că pentru oricare două dintre acestea, a, b , cu $a > b$, numărul $a - b$ nu divide numărul $a + b$?

Problema 3. Pentru fiecare număr natural $n \geq 2$, notăm cu $s(n)$ numărul de perechi (x, y) de numere naturale, alese dintre $1, 2, \dots, n$, cu $x > y$, astfel încât x și y să aibă exact $x - y$ divizori comuni.

a) Există n astfel încât $s(n) = 2019$?

b) Există n astfel încât $s(n) = 2020$?

Justificați răspunsurile.

Problema 4. Numerele naturale de la 1 la 49 sunt așezate la întâmplare, câte unul în fiecare căsuță a unei table de șah 7×7 . Arătați că există un pătrat 2×2 al tablei, format din patru căsuțe vecine, astfel încât suma celor patru numere din interior să fie cel puțin 81.

*Timp de lucru 2 ore. Se adaugă 60 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Hunedoara, 23 aprilie, 2019

CLASA a V-a, Soluții și Baremuri

Problema 1. Determinați numerele de trei cifre \overline{abc} al căror pătrat are cifra sutelor a , cifra zecilor b și cifra unităților c .

Soluție și barem. Fie $n = \overline{abc}$. Avem $n^2 = M \cdot 1000 + n \dots \dots \dots$ 1 punct
Rezultă $n(n-1) = M \cdot 1000$ deci $n(n-1)$ este divizibil cu 2^3 și cu 5^3 . Cum numerele n și $n-1$ sunt relativ prime, atunci n sau $n-1$ se divide cu 5^3 , respectiv n sau $n-1$ se divide cu $2^3 \dots \dots \dots$ 3 puncte

Din divizibilitatea cu 125, n poate fi unul dintre numerele 125, 126, 250, 251, 375, 376, 500, 501, 625, 626, 750, 751, 875, 876. În fiecare caz n sau $n-1$ trebuie să se dividă cu 8. Prin verificare rămân doar soluțiile 376 și 625. $\dots \dots \dots$ 3 puncte

Problema 2. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Care este numărul maxim $m \leq n$ (m depinde de n), pentru care putem alege m numere dintre $1, 2, \dots, n$ cu proprietatea că pentru oricare două dintre acestea, a, b , cu $a > b$, numărul $a - b$ nu divide numărul $a + b$?

Soluție și barem. Să notăm cu A o astfel de familie de numere, alese dintre $1, 2, \dots, n$. Pentru $a > b$ din A , deducem că $a - b$ nu poate fi 1 sau 2. Altfel 1 ar divide $a + b$, respectiv 2 ar divide $a + b = 2 + 2 + 2b \dots \dots \dots$ 2p

Rezultă că diferența minimă dintre două numere consecutive din A este 3. În plus, dacă $a - b = 3k$ și b nu se divide cu 3, atunci $a + b = 2b + 3k$ nu se divide cu $a - b \dots \dots \dots$ 2p

În funcție de restul împărțirii lui n la 3, vom avea următoarele secvențe de numere din $1, 2, \dots, n$, cu număr maxim de elemente:

Dacă $n = 3k$, A cu număr maxim poate fi $1, 4, 7, \dots, 3k - 2$ deci $m = k \dots \dots \dots$ 1p

Dacă $n = 3k + 1$, A poate fi $1, 4, \dots, 3k - 2, 3k + 1$ deci $m = k + 1 \dots \dots \dots$ 1p

Dacă $n = 3k + 2$ o astfel de mulțime este $1, 4, 7, \dots, 3k - 2, 3k + 1$ deci $m = k + 1$ 1p

Problema 3. Pentru fiecare număr natural $n \geq 2$, notăm cu $s(n)$ numărul de perechi (x, y) de numere naturale, alese dintre $1, 2, \dots, n$, cu $x > y$, astfel încât x și y să aibă exact $x - y$ divizori comuni.

a) Există n astfel încât $s(n) = 2019$?

b) Există n astfel încât $s(n) = 2020$?

Justificați răspunsurile.

Soluție și barem. Observăm că dacă $d|y$ și $d|x$ atunci $d|x - y \dots \dots \dots$ 1p

Prin urmare dacă $(x, y), x > y$, este o pereche cu proprietatea din enunț, atunci $x - y$ are exact $x - y$ divizori, deci toate numerele $1, 2, \dots, x - y$. Dacă $x - y = 1$ atunci x și y au un singur divizor, adică 1 $\dots \dots \dots$ 1p

Altfel $x - y \geq 2$, deci $x - y - 1 \geq 1$, iar $x - y - 1 | x - y$ implică $x - y - 1 = 1$, adică $x - y = 2$. Prin urmare x și y au aceeași paritate. Pentru ca x și y să aibă în comun 2 divizori, ele nu pot fi impare, deci sunt ambele pare. Așadar perechile de acest tip sunt de forma $(y + 1, y)$ și $(2y + 2, 2y)$, cu y număr natural nenul $\dots \dots \dots$ 2p

Rezultă că pentru $n = 2k$, k număr natural, avem $s(n) = (2k - 1) + (k - 1) = 3k - 2$, iar dacă $n = 2k + 1$, $k \geq 1$ avem $s(n) = 2k + (k - 1) = 3k - 1$. Cum $s(n)$ nu poate fi multiplu de 3, răspunsul la a) este nu..... **2p**

Cum $2020 = 3 \cdot 674 - 2$ obținem că $s(1348) = 3 \cdot 674 - 2 = 2020$, așadar „da” pentru b)..... **1p**

Problema 4. Numerele naturale de la 1 la 49 sunt așezate la întâmplare, câte unul în fiecare căsuță a unei table de șah 7×7 . Arătați că există un pătrat 2×2 al tablei, format din patru căsuțe vecine, astfel încât suma celor patru numere din interior să fie cel puțin 81.

Soluție și barem. Există 6×6 pătrate de tipul celor din enunț..... **1p**

Fie $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_{36}$, sumele numerelor scrise în interiorul acestora. Deducem că $s = s_1 + s_2 + \dots + s_{36} \leq 36s_{36}$ **1p**

Pe de altă parte, în suma de mai sus, pătrățelele din colțuri sunt numărate o dată, cele de pe margini, dar nu în colțuri, de două ori, iar celelalte de patru ori. Avem deci $s \geq 49 + 48 + 47 + 46 + 2(45 + \dots + 26) + 4(25 + 24 + \dots + 1)$ **3p**

Calculând sumele, deducem $s \geq 2910$. Așadar $36s_{36} \geq 2910$, deci $s_{36} \geq \frac{2910}{36} > 80,8$ și, cum s_{36} e întreg, rezultă $s_{36} \geq 81$ **2p**