Problemă rezolvată

Să se demonstreze că pentru orice numere reale pozitive a, b, c are loc inegalitatea:

$$\frac{a+1}{\sqrt{a}}+\frac{b+4}{2\sqrt{b}}+\frac{c+9}{3\sqrt{c}} \geq 6 \ .$$

Clasele VII-VIII
Valer Pop

Soluție

Se folosește inegalitatea mediilor: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, pentru orice numere reale pozitive.

Inegalitatea se mai poate scrie și sub forma: $\frac{a+b}{\sqrt{ab}} \geq 2$. Folosind această formă a inegalității putem scrie: $\frac{a+1}{\sqrt{a}} \geq 2$; $\frac{b+4}{\sqrt{4b}} = \frac{b+4}{2\sqrt{b}} \geq 2$ *si* $\frac{c+9}{\sqrt{9c}} = \frac{c+9}{3\sqrt{c}} \geq 2.$

Adunând aceste ultime inegalități membru cu membru obținem:
$\frac{a+1}{\sqrt{a}}+\frac{b+4}{2\sqrt{b}}+\frac{c+9}{3\sqrt{c}} \geq 2+2+2$, de unde inegalitatea $\frac{a+1}{\sqrt{a}}+\frac{b+4}{2\sqrt{b}}+\frac{c+9}{3\sqrt{c}} \geq 6$.